

卒業研究報告書

題目

石取りゲームの NP 完全性の検証

指導教員

石水 隆 講師

報告者

15-037-0042

長島 優

近畿大学工学部情報学科

平成 31 年 1 月 31 日提出

概要

石取りゲームとは、無限サイズの碁盤上に配置された碁石に対して、始点の碁石から終点の碁石まで縦横のみの移動で全ての碁石を取ることを目指すゲームである。

石取りゲームは、石の初期配置がわずかに異なるだけで解法が大きく異なる。このことから、石取りゲームは本質的に難しいゲームであると推測される。そこで、本研究では石取りゲームの NP 完全性の検証を行う。

本研究では、代表的な 3-SAT 問題を石取りゲームに還元することで石取りゲームの NP 完全性を証明する。3-SAT 問題の OR ゲートに対応する石の配置『OR ガジェット』および AND ゲートに対応する石の配置『AND ガジェット』などを用いて、任意の 3-SAT 問題に対して、それが充足できる解を持つ場合のみ全ての石を取ることができる石の配置が存在することを示す。

目次

1. 序論	4
1.1 本研究の背景.....	4
1.2 解放の存在するパズルゲーム.....	4
1.3 計算量の大きいパズルゲーム.....	4
1.4 NP 完全問題.....	4
1.5 3-SAT 問題.....	5
1.6 本研究の目的.....	5
1.7 本報告書の構成.....	5
2 研究内容	5
2.1 石とりゲームとは	6
2.2 戦略.....	6
2.3 一方通行ガジェット.....	6
2.4 OR ガジェット.....	7
2.5 AND ガジェット.....	8
2.6 真偽値選択ガジェット	8
2.7 合流ガジェット	9
2.8 ガジェットの配置	9
2.9 ゴミ掃除ガジェット.....	10
3 証明	10
4 結論・今後の課題	14
謝辞	15
参考文献	16

1. 序論

1.1 本研究の背景

古くから、数独や 15 パズル、ペグソリティア等、様々なパズルゲームが考案され、楽しまれてきた。近年では、いくつかのパズルゲームに対して、それを解くアルゴリズムが提案され、そのアルゴリズムを用いてプログラムが作られている。一方、テトリスやぷよぷよ、倉庫番のように一般的な解放が存在しないと思われるパズルゲームも存在する。これらのパズルゲームに対して、その計算量を検証すること、一般的な解放が存在するならばそのアルゴリズムを求めることは、重要な課題である。

石取りゲームは日本において江戸時代から知られているゲームであるが、その難易度は明らかになっていない。そのため本研究では石とりゲームの難易度を検証する。

1.2 解放の存在するパズルゲーム

いくつかのパズルゲームについては解放が知られている。例えば、15 パズルは盤面サイズの多項式時間で解くことができる[9]。

1.3 計算量の大きいパズルゲーム

パズルゲームには、計算量の観点から一般的な解放が存在しないと思われるものもある。例えば数独、カックロ、スリザーリンク、テトリス、ぷよぷよは NP 完全であることが示されている[3][4][5][6][7]。また、倉庫番、橋渡しゲーム等は P-SPACE 完全であることが示されている[8][1]。これらのパズルゲームの多くは、手数制限のあるものは NP 完全に、手数制限の無いものは P-SPACE 完全になる[1]。

このような計算量の大きいパズルゲームには一般的な解放を求めることは不可能であると考えられており、サイズの小さい部分問題に対する解き方やヒューリスティックな手法が用いられる。

1.4 NP 完全問題

NP 完全問題を以下に示す。非決定性計算モデルにより多項式ステップで解くことのできる問題のクラスを非決定性多項式時間といい、NP で表す。NP に属する問題を NP で解けるともいう。ナップサック問題や分割問題は NP で解ける問題である。問題 A が NP で解け、かつ、NP で解けるすべての問題が A に多項式時間還元可能であるとき、A は NP 完全であるという。

別の言い方をすると、NP 完全問題は非決定性計算モデルにより多項式ステップで解け、かつ非決定性計算モデルで解く限りにおいてはどうしても多項式ステップが必要、という問題である。すなわち、NP 完全問題は非決定性計算モデルで多項式ステップより少ないステップ数では解けないという計算量的な限界を持つ。問題を解くどのようなアルゴリズムもその限界以下で解くことができず、この限界はその問題の持つ本質的な難しさを表しているといえる。この限界を計算量の下界という。

NP 完全であることがすでに知られている問題 A を利用して、問題 B が NP 完全であることを示すには、

- (1) B が NP で解ける、かつ
- (2) A が B に多項式時間還元可能である

を示せばよい。なぜなら(2)を示せば、すべての NP 完全問題は A に多項式時間還元可能で、A が B に多項式時間還元可能であるから、すべての NP の問題は B に多項式時間還元可能であることがいえるからである。

ある NP 完全問題 A が P で解けるとしよう。すると NP で解けるすべての問題は A に多項式時間還元可能なので、P で解ける。よって $NP \subseteq P$ となり $NP=P$ が導かれる。また NP に属するある問題 A が P で解けないことが示されたとしよ

う。すると $A \in NP-P$ であり $P \neq NP$ が導かれる。このときすべての NP 完全問題は P で解けず、難しいであることが証明される。[9]

1.5 3-SAT 問題

本節では、代表的な NP 完全問題である 3-充足可能問題 (3-satisfiability problem, 3-SAT 問題) について述べる。3-SAT 問題とは、命題変数は真または偽の値をとる変数では真、偽の代わりにそれぞれ 1, 0 と書くことにする。論理式は、1, 0, 命題変数を否定 (\neg), 論理和 (\cup), 論理積 (\cap) とで繰り返し連結し得られる式である。形式的には、論理式は次の (1), (2) により定められる。(1) 1, 0, 命題変数はいずれも論理式である。(2) α, β が論理式なら、 $\neg \alpha, (\alpha \cup \beta), (\alpha \cap \beta)$ も論理式である。

真理値割り当てはすべての命題変数に対してその値を 0 または 1 に割り当てる関数である。真理値割り当てを次のように拡張して論理式の値を 0 または 1 に割り当てることにする。 α, β を論理式とする。 α の値が 0 のとき $\neg \alpha$ の値は 1, α が 1 のとき $\neg \alpha$ は 0 である。 α と β のいずれか一方の値が 1 のとき $(\alpha \cup \beta)$ の値は 1 で、他の場合 $(\alpha \cup \beta)$ は 0 である。 α と β の両方の値が共に 1 のとき $(\alpha \cap \beta)$ の値は 1 で、他の場合 $(\alpha \cap \beta)$ は 0 である。どのような真理値割り当てのもとでも α と β の値が等しいとき、 $\alpha = \beta$ 書く。 \cup と \cap に関しては結合則 $((\alpha_1 \cup \alpha_2) \cup \alpha_3) = (\alpha_1 \cup (\alpha_2 \cup \alpha_3))$, $((\alpha_1 \cap \alpha_2) \cap \alpha_3) = (\alpha_1 \cap (\alpha_2 \cap \alpha_3))$ が成立するので $(\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3) = ((\alpha_1 \cup \alpha_2) \cup \alpha_3)$, $(\alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3) = ((\alpha_1 \cap \alpha_2) \cap \alpha_3)$ と書いても構わない。

論理式の値が 1 になるような真理値割り当てが存在するなら、その論理式は充足可能であるといい、与えられた論理式が充足可能かを決定する問題を充足可能性問題という。

例えば、論理式 $((X_1 \cup X_2 \cup X_3) \cap (\neg X_1 \cup \neg X_2) \cap (X_1 \cup \neg X_3) \cap (X_2 \cup X_3))$ は、 X_1, X_3 の値を 1 に、 X_2 に 0 を割り当てると、論理式の値が 1 になるので充足可能である。

命題変数または命題変数の否定をリテラルという。リテラルを \cup で結合して得られる式を節という。節を \cap で結合して得られる論理式を乗法標準形という。いま、与えられた論理式が乗法標準形をしており、すべての節が 3 個のリテラルからなるとき、この論理式が充足可能かを決定する問題を 3-充足可能性問題 (3-SAT 問題) という。[9]

3-SAT 問題は NP 完全であることが示されている [9]。

1.6 本研究の目的

本研究が対象とする石取りゲームは、石の初期配置がわずかに異なるだけで解法が大きく異なる。このことから、石取りゲームは本質的に難しいゲームであると推測される。そこで、本研究では石取りゲームの NP 完全性の検証を行う。

1.7 本報告書の構成

2 節以降の各節の内容を簡潔に記述する。まず、石取りゲームについて簡単に説明し、3-SAT 問題に帰着するための戦略を述べる。その後、各ガジェットの説明を行って、そのガジェットを用いて 3-SAT 問題に石取りゲームが帰着できることを示す。

2 研究内容

本研究では、3-SAT 問題を石取りゲームに帰着させることにより NP 完全性を検証する。すなわち、3-SAT 問題が

充足できる解を持つ場合のみ解を持つような石の並び方が作成できるかを検証する.

2.1 石取りゲームとは

石取りゲームとは, 無限サイズの碁盤上に配置された碁石に対して, 始点の碁石から終点の碁石まで縦横のみの移動で全ての碁石を取ることを目指すゲームである. 図 1 に石取りゲームの例を示す. 図 1 の配置では, 番号順に石を取ることで全ての石を取る事ができる.

石取りゲームのルールは, 同一直線上であればいくつでも離れていても拾える. 進路の途中にある石は必ず拾わなければならない. 石のある場所なら直角に方向転換ができる. 進路をすぐ後戻り (折り返し) できないというものだ. [2]

石取りゲームは, 石の初期配置がわずかに異なるだけで解法が大きく異なる. このことから, 石取りゲームは本質的に難しいゲームであると推測される.

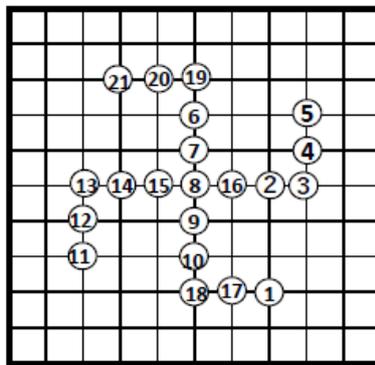


図 1 石取りゲームの例

2.2 戦略

本節では, 石取りゲームの NP 完全性を示すために本研究で用いる戦略について述べる.

3-SAT 問題を石取りゲームに帰着させるために, OR ゲートに対応する石の並び『OR ガジェット』および AND ゲートに対応する石の並び『AND ガジェット』を作成する. 各ガジェットは, 複数の『入力石』を持ち, OR ガジェットは入力石のどれか一つが取ればガジェット内の全ての石が取れ, AND ガジェットは全ての入力石が取れた場合のみガジェット内の全ての石が取れるようにする. また, 入力 X に対して X と \overline{X} のどちらかを選択する『真偽値選択ガジェット』, 石を取る方向を制限する『一方通行ガジェット』等も必要である.

以下では各ガジェットについて説明する.

2.3 一方通行ガジェット

入力石及び出力石が 1 つのみの石の並びのガジェットのことである. 図 5 に一方通行ガジェットを示す.

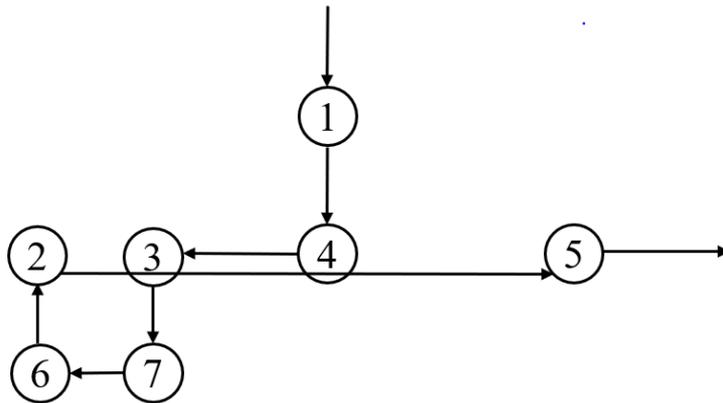


図2 一方通行ガジェット

1を1番最初に取った場合には、 $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 5$ と取ることができるが、5を最初に取った場合には、5の次には必ず4を取るようになるため、1の石を取ることができない。

このように1から入って5に抜けることはできるが5から入って1から抜けることは出来ない一方通行のガジェットとなっている。

2.4 OR ガジェット

OR ガジェットは、入力石のどれか一つ取れば、ガジェット内の石が全て取れるような石の配置である。図2にORガジェットを示す。図2のORガジェットは、和項 $(A+B+C)$ に対応する石の配置である。A,B,Cは入力石であり、A',B',C'は出力石である。Aを取った場合、石取りゲームのルールに従って、時計回りにガジェット内の石を全て取りA'を取るか、Aからすぐ左に行きA'のみを取るかを選ぶことができる。B,Cも同様である。従って、A,B,Cのうち1つ以上を取ることができればガジェット内の石を全て取れる。

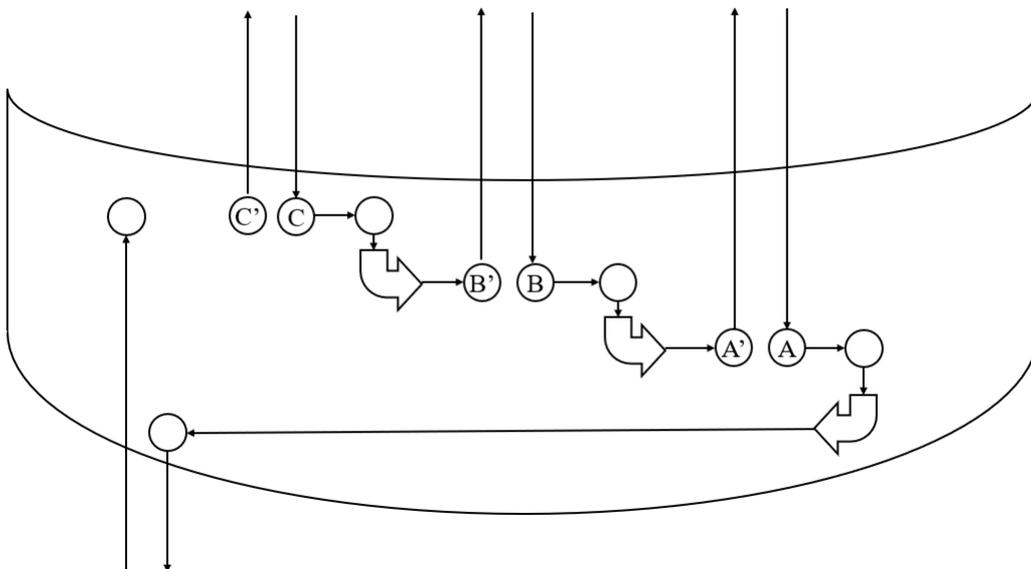


図3 ORガジェット

2.5 AND ガジェット

AND ガジェットは,全ての入力石が取れた場合のみ,ガジェット内の石が全て取れるような石の配置である.図 3 に AND ガジェットを示す. 図 3 の AND ガジェットは, 積項 $(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)$ に対応する石の配置である. α, β, γ は入力石, α', β', γ' は出力石である. α が取れた場合, 一方通行ガジェットを経由して α' のみを取ることができ, β', γ' を取ることはできない. β, γ を取れたときも同様である. 従って, α, β, γ の全てを取ることができた場合のみガジェット内の石を全て取ることができる.

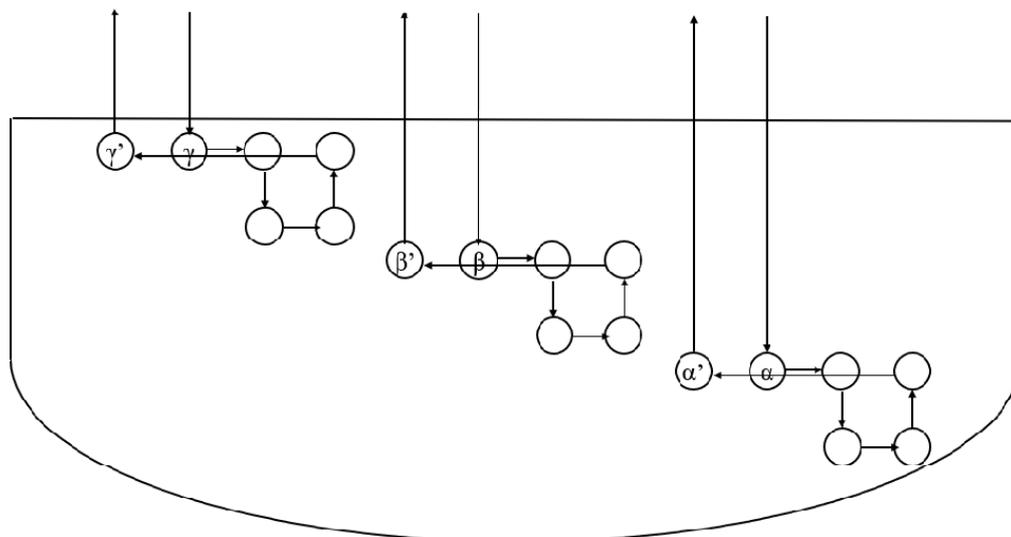


図 4 AND ガジェット

2.6 真偽値選択ガジェット

真偽値選択ガジェットとは,入力石が 2 つのうちどちらかの時のみガジェット内の全ての石が取れるガジェットのことである.図 4 に真偽値選択ガジェットを示す. 図 4 の真偽値選択ガジェットは A または \overline{A} を選択に対応している. ガジェットの一番下の石を取った場合, ガジェット内の石を全て取って最後に A を取るか, \overline{A} を取るかを選択することができる.

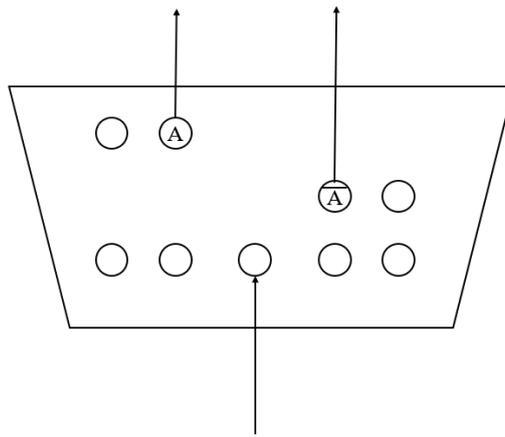


図 5 真偽値選択ガジェット

2.7 合流ガジェット

合流ガジェットは、真偽値選択ガジェットで分岐した石の取る流れを合流させるための石の配置である。図 6 に合流ガジェットを示す。

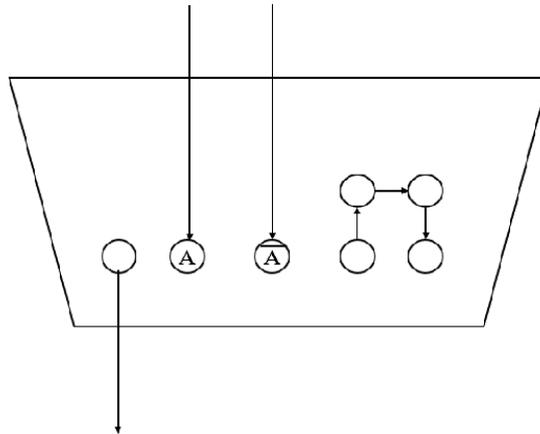


図 6 合流ガジェット

2.8 ガジェットの配置

前述の各ガジェットを用いて 3-SAT 問題に対応するようにガジェットを配置する。図 7 に 3-SAT に対応するガジェットの配置を示す。但し、図 7 において、各記号は前述した各ガジェットの石の並びを表す。また、S は取り始めの石、G は取り終わりの石を示す。石の取方の例を説明する。まず、S から A の選択ガジェットに入り、 $A \cdot \neg A$ のどちらかを選択する。例えば A が選ばれた場合、 $A \cup B \cup C$ の OR ガジェットに入り、各 OR ガジェットをまとめる AND ガジェットに入る。その後 $A \cup B \cup C$ の OR ガジェットに戻り、左に配置された A の合流ガジェットに入ることで、A に関する石取りは終了する。その後、B、C に関しても同様の操作を行うことで、ガジェット内の全ての石を取ることが可能になる。

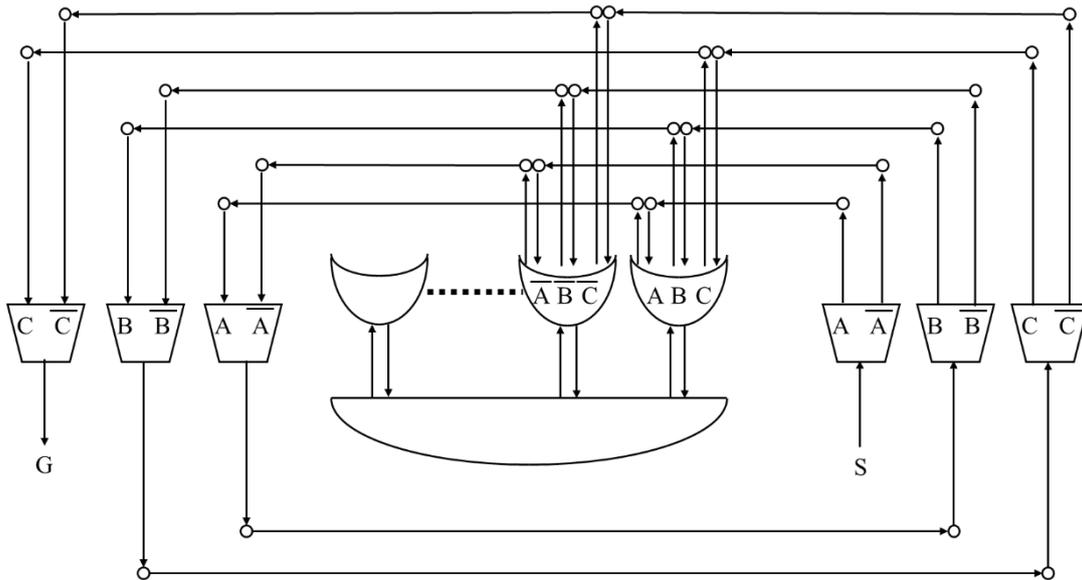


図 7 3-SAT 問題に対応する石の並び

2.9 ゴミ掃除ガジェット

前節で述べた通りにガジェットを配置すると、真偽値ガジェットによって選ばれなかった方の石が残る。そこで、残った石を取るためにゴミ掃除ガジェットを配置する。ゴミ掃除ガジェットは真偽値選択ガジェットと合流ガジェットを組み合わせた配置である。図 8 にゴミ掃除ガジェットを示す。

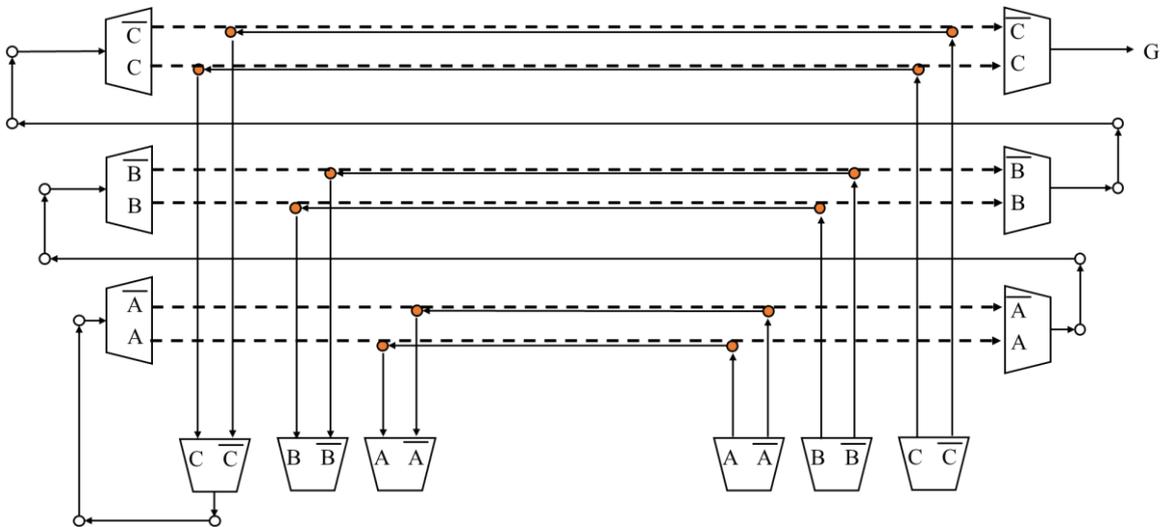


図 8 ごみ取りガジェットの配置

図 7 に示した石の配置では、A,B,C の選択ガジェットで選ばれなかった先の石（図 8 のオレンジの石）の一部が取られずに残ることになる。そこで、これらの石の左に選択ガジェット、右に合流ガジェットを設ける。このごみ取りガジェットによって残った石を全て取ることができる。

3 証明

本章では、2.8 節および 2.9 節で述べたガジェットの配置で、3-SAT 問題が充足解を持つときのみ全ての石を取

ることができることを証明する。

補題 1 : 前章で述べた石の配置は, 対応する 3-SAT が充足解を持つとき, 全ての石を取ることができる.
(証明)

2.3 節で述べた通り OR ガジェットは, 入力石のどれか一つと取ればガジェット内の全ての石を取れる. また, 2.4 節で述べた通り AND ガジェットは全ての入力石が取ればガジェット内の石が全て取れる. 一方通行ガジェット, 真偽値選択ガジェット, 合流ガジェットも同様に入力石が取ればガジェット内の全ての石が取れる. さらに, ゴミ掃除ガジェットを用いることにより, 真偽値選択ガジェットにより選ばれなかった方の石を全て取る事ができる.

3-SAT 問題が充足解を持つとき, 全ての OG ガジェットについて少なくとも 1 つの入力石を取ることができ, AND ガジェットの全ての入力石を取ることができる. 従って, 3-SAT 問題が充足解を持つとき, 2.7 節に示した石の取り方を実施すれば, 全ての石を取ることができる.

補題 2 : 前章で述べた石の配置は, 対応する 3-SAT が充足解を持たないとき, 少なくとも 1 個の石が取れずに残る.
(証明)

以下では, 3-SAT 問題が充足解を持たないとき取れない石が存在することを示す. つまり, 想定外の石の取り方をしたときに, 取れてはいけない石が取れてしまわないか検証する. 具体的には以下 2 点の動きをした場合に石が残ることを示す.

①OR ガジェットにおける想定外の動き

②ごみ取りガジェットにおける想定外の動き

①: 2.2 節で示したように, OR ガジェットで A から入ったときは, すぐ左へ行つて A' から出るか, 時計回りにガジェット内の全ての石を取つて A' から出るかを想定している. しかし, A から入つて B' から出ることも起こりうる (図 9). この場合, 次の OR ガジェット②で B から B' に入り, ガジェット内全ての基石を取り (図 10), そのさらに次の OR ガジェット③で B から入り A' から出て, 前節で示した元のコースに戻る事が起こりうる (図 11). この場合, 想定していない OR ガジェット③内の B のガジェットが全てとれてしまうが, この場合には OR ガジェット①の A' や B の上のガジェットを取ることができないため, 全ての石を取ることができない.

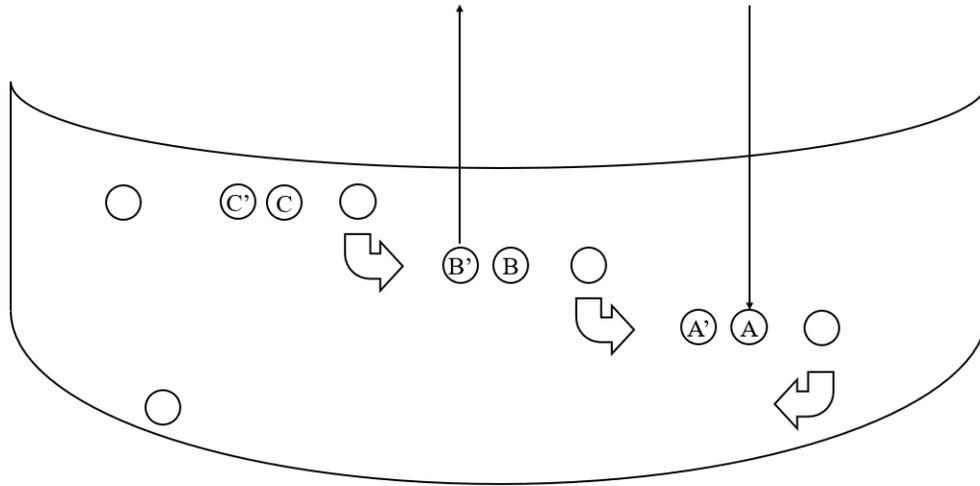


図 9 OR ガジェット①内での想定外の動き(1)

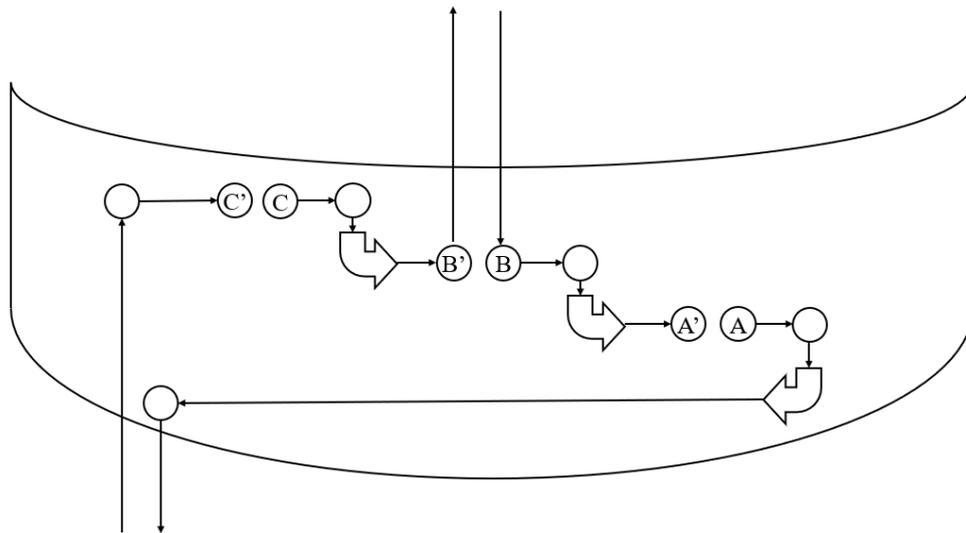


図 10 OR ガジェット②内の動き

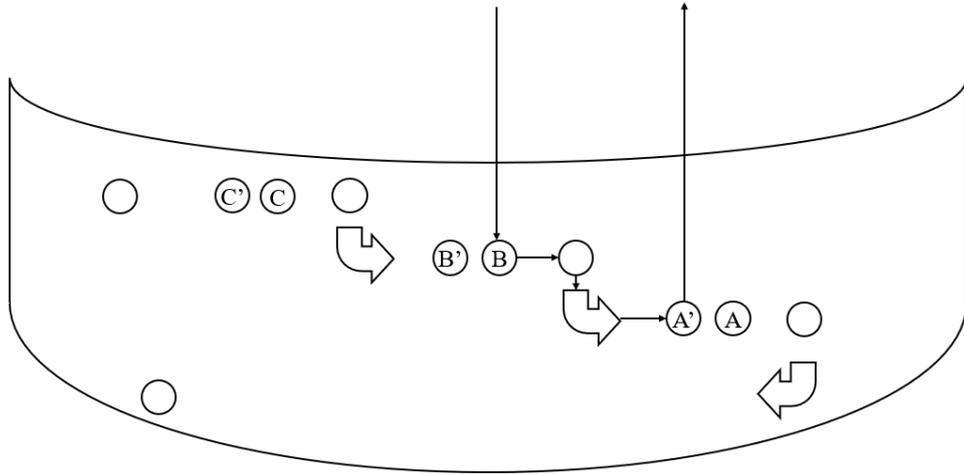


図 11 OR ガジェット③内での動き

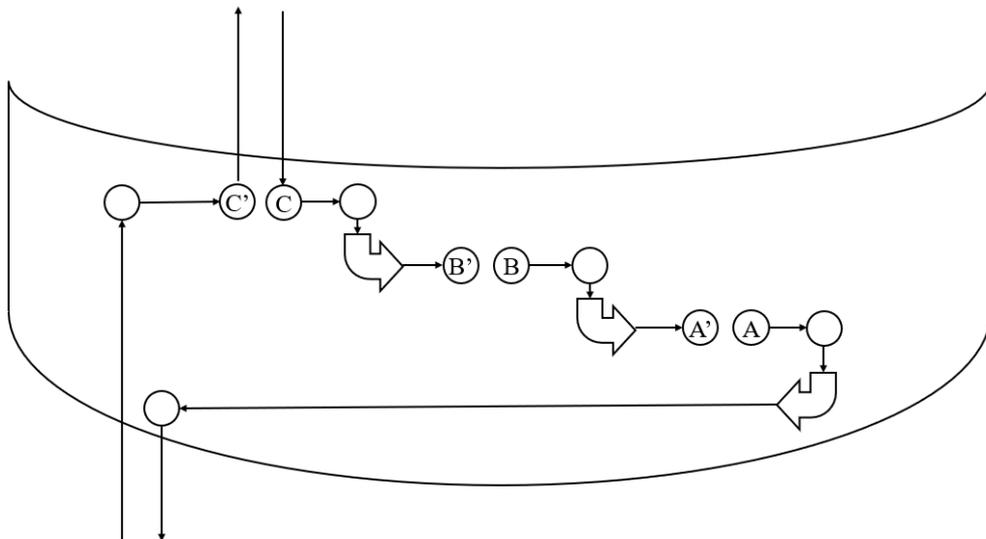


図 12OR ガジェット①内の動き(2)

②:ゴミ掃除ガジェットで掃除中に OR ガジェットに行って石を取る可能性はあるが,一方通行ガジェットがあるため,OR ガジェット内の石を全て取ることは不可能である.

補題 1 および補題 2 より, 以下の定理 1 が成り立つ.

定理 1: 任意の 3-SAT 問題を石取りゲームに還元できる.

3-SAT 問題は NP 完全であるので, 以下の定理 2 が成り立つ.

定理 2: 石取りゲームは NP 完全である.

4 結論・今後の課題

本研究では石取りゲームは NP 完全であることを示した. 今後の課題は, 石取りゲームに対するヒューリスティックな手法を求めること, また, 類似のゲームの NP 完全性の検証を進めることである.

石取りゲームに対するヒューリスティックな手法としては, 代表的な石の配置のパターンを挙げ, パターンごとに解法を作成することが考えられる. 考えられるパターンとしては石を取る方向が 1 方向にしか無い場合や, 石を取る順番が固定される場合などがある.

石取りゲームに類似したゲームとしてはナイトツアーズなどがある [2]. ナイトツアーズとは, チェスを使ったパズルゲームである. 石取りゲームの類似点はチェスボードのマスすべて 1 回ずつ通過し, そのうえで同じマスを 2 度通ってはいけないという点だ. 相違点は, ナイトを動かし方が石取りゲームよりも複雑なルールがあるという点だ. [2]

謝辞

本研究を行うにあたり、終始温かい御指導、御鞭撻を賜りました近畿大学工学部情報学科情報倫理工学研究室石水隆先生に深く感謝致します。

そして、本研究の過程で御協力頂きました、白澤利隆さんにも感謝致します。

最後に、研生活を支えてくれた家族に感謝します。

参考文献

- [1] R.A.Hearn, E.D.Demaine:ゲームとパズルの計算量,近代科学社(2011)
- [2] 秋山久義:ボードパズル読本,新紀元社(2000).
- [3] C. J. Colbourn, The complexity of completing partial Latin squares. *Discrete Appl. Math.*, Vol. 8, pp.25–30 (1984).
- [4] T. Yato. Complexity and completeness of finding another solution and its application to puzzles. Master thesis, the University of Tokyo, 2003.
<http://www-imai.is.s.u-tokyo.ac.jp/~yato/data2/MasterThesis.pdf>
- [5] 瀬田 剛広, カッコロの計算量、情報処理学会アルゴリズム研究会 84-8 (2002.5),
http://www-imai.is.s.u-tokyo.ac.jp/~seta/paper/SIGAL84-8/cross_sum.pdf
- [6] 牟田 秀俊, ふよふよは NP 完全, 電子信学会技術研究報告, COMP, コンピューテーション Vol.105, No.72, pp.39-44, 電子情報通信学会 (2005)
- [7] Erik D. Demaine, Susan Hohenberger, David Liben-Nowell, Tetris is Hard, Even to Approximate, *Computer Science* Vol.2002, No.20 pp,1-56, Cornell Univesity Lbrary, (2002),
<https://arxiv.org/abs/cs/0210020>
- [8] J.Culberson, Sokoban is PSPACE complete, Technical Reports 97-02, Department of Computing Science, University of alberta, <http://www.cs.ualberta.ca/~joe/Preprints/soko.ps>
- [9] 岩田茂樹:NP 完全問題入門,共立出版株式会社(1995)
- [10] W.E.Story, Note on the ‘15’ Puzzle, *American Mathematical Monthly* 2, pp. 399-404, (1879)
https://www.jstor.org/stable/2369492?seq=1#metadata_info_tab_contents