

## 情報論理工学 研究室

第4回：  
2人有限零和ゲーム



1

## ゲームの分類

分類			
人数	1人	2人	多人数
協力可能性	対決型		協力型
利得	零和		非零和
有限性	有限		無限
情報秘匿性	完全情報		不完全情報
確定性	確定		非確定
手番	順次型	同時型	反射型

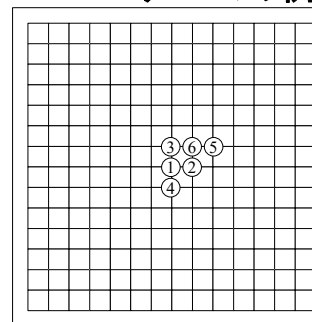
2

## 2人零和有限確定完全情報ゲーム

- 人数: 2人でプレイ
- 零和: 双方の得点を足すと常に0
  - 得点するには相手から奪う必要あり
- 有限: 可能な局面の数が有限
  - 各手番で指せる・打てる手の数が有限
  - 有限時間内にゲームが終了する
- 確定: ランダム性が無い
- 完全情報: ゲームの情報は全て公開
  - 手札を隠したり山札から引いたりしない

3

## 2人零和有限確定完全情報 ゲームの例: 連珠



- 人数  
2人
- 零和  
自分が勝つ=相手を負かす
- 有限  
置ける石の位置は有限
- 確定  
ランダム性が無い
- 完全情報  
全ての情報が公開

4

## 2人零和有限確定完全 情報ゲームの特徴

- 2人零和確定有限完全情報ゲーム
  - 零和: 自分が得点する=相手から点を奪う

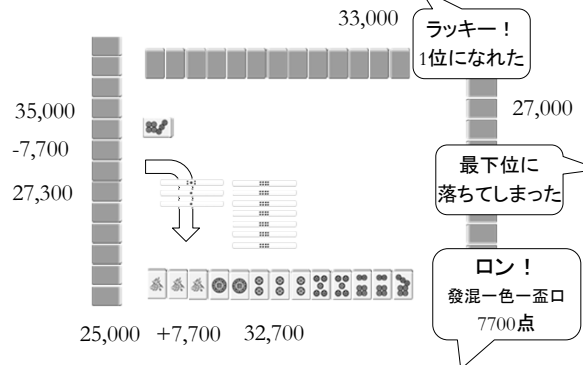
最善手: 自分にとって最大の利益が得られる手

零和なので最善手は自動的に  
相手にとって最も嫌な手になる

3人以上だと  
最大の利益が得られる手=最善手  
とは限らない

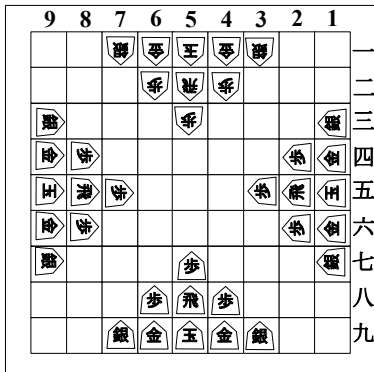
5

## 多人数ゲームの例: 麻雀



6

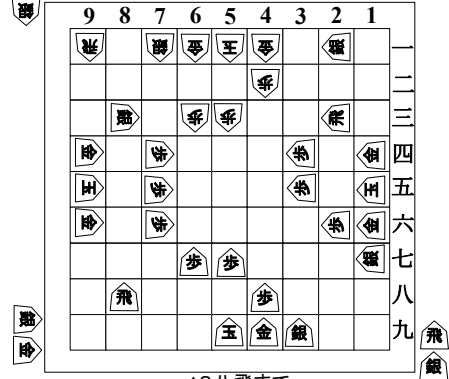
### 多人数ゲームの例: 4人将棋



時計回りに  
順番に指す

7

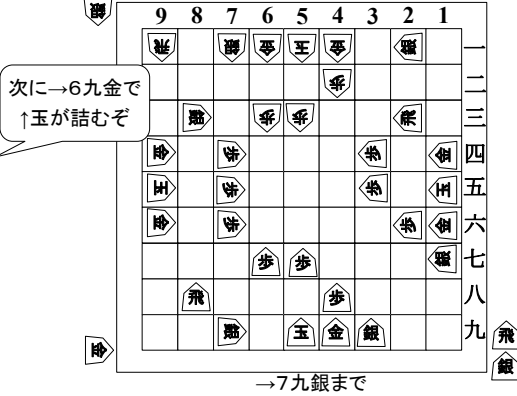
### 多人数ゲームの例: 4人将棋



↑8八飛まで

8

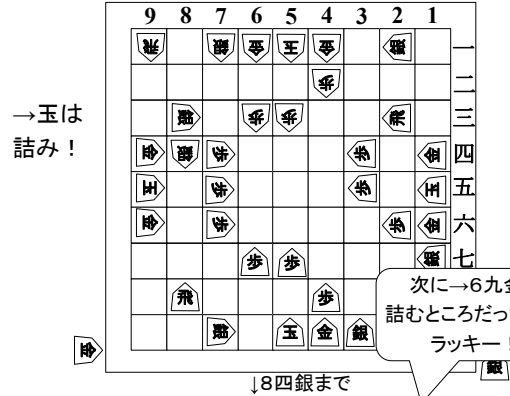
### 多人数ゲームの例: 4人将棋



→7九銀まで

9

### 多人数ゲームの例: 4人将棋



↓8四銀まで

10

### 2人零和有限確定完全 情報ゲームの勝敗

- 2人零和確定有限完全情報ゲーム
  - 勝敗は試合開始時に確定している!

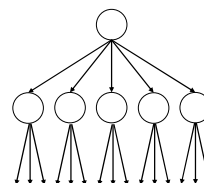
双方が最善手を指した場合、試合開始時にすでに  
先手必勝・後手必勝・引き分けのいずれかが確定

帰納的に証明できる

11

### 勝ちの局面・負けの局面

○ × 勝負の付いた局面  
勝ち 負け = 勝ちか負けか確定



試合中の局面は?

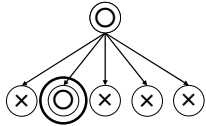
12

## 勝ちの局面・負けの局面

勝負の付く1手前の局面

合法手の中に1つでも「勝ちの局面」へ行く手がある  
⇒その手を選べばいい

1手前の局面も勝ちの局面



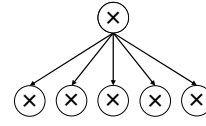
13

## 勝ちの局面・負けの局面

勝負の付く1手前の局面

全ての合法手が「負けの局面」へ行く手  
⇒どの手を選んでも負け

1手前の局面も負けの局面



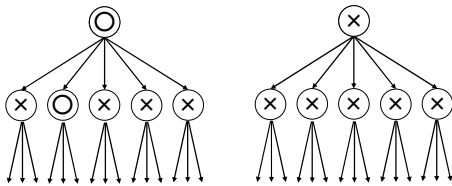
1手前の局面は勝ちか負けかが決定

14

## 勝ちの局面・負けの局面

勝負の付く2手前の局面

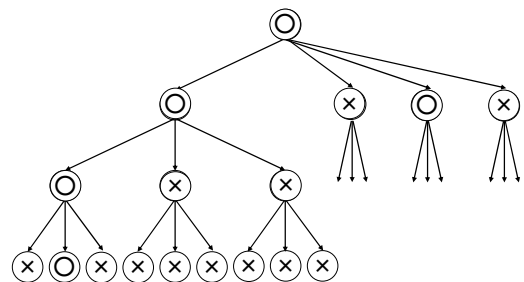
勝ちの局面へ行く手がある⇒その局面も勝ちの局面  
負けの局面へ行く手のみ ⇒その局面も負けの局面



2手前の局面も勝ちか負けかが決定

15

## 勝ちの局面・負けの局面

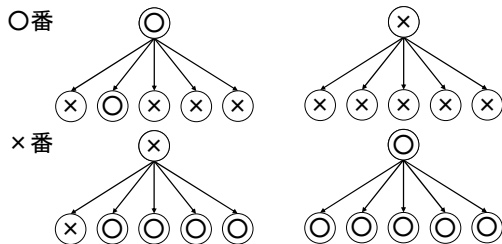


勝負の付いた局面から順に遡っていく  
⇒初期局面まで遡れる

16

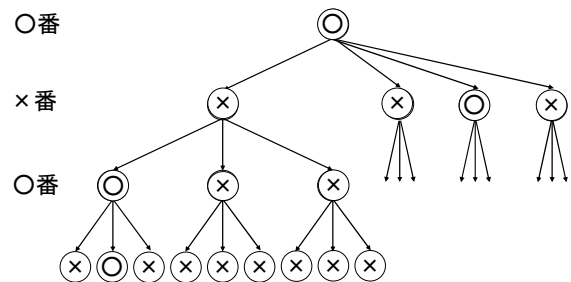
## 勝ちの局面・負けの局面

- 手番は交互に来る
- 各プレイヤーは自分の手番で最善手を選択する  
⇒手番毎に立場を入れ替える



17

## 勝ちの局面・負けの局面

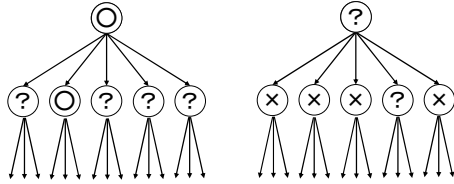


やはり初期局面まで遡れる

18

## 勝ちの局面・負けの局面

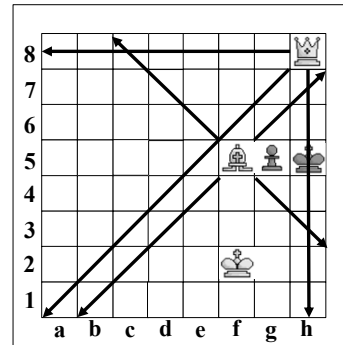
勝ちの局面へ行く手がある ⇒ 勝ち  
 負け以外の局面へ行く手がある ⇒ 負けかどうかは不明



勝ちとは1つでもあればOK 負けは全て負けのみ確定

19

## 勝ちの局面:チェス



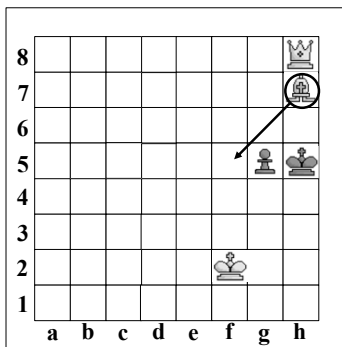
黒番  
 黒はチェックがかかっているが...  
 逃げ場無し!  
 チェックメイト!

この局面は白勝ち

1.Qh8, Kh5 2.Bf5# まで

20

## 勝ちの局面:チェス



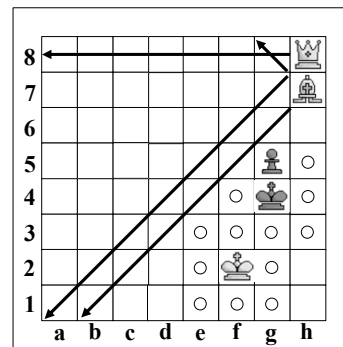
白番  
 白は様々な手を指せるが...  
 白はビショップをf4に動かせば  
 チェックメイト

この局面も白勝ち

1.Qh8, Kh5 まで

21

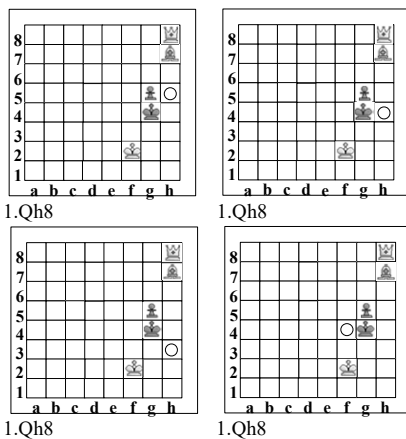
## 手の選択



黒番  
 黒が指せる手は  
 Kh5, Kh4, Kh3, Kf4 の  
 4通り  
 どの手を指す?

1.Qh8 まで

22



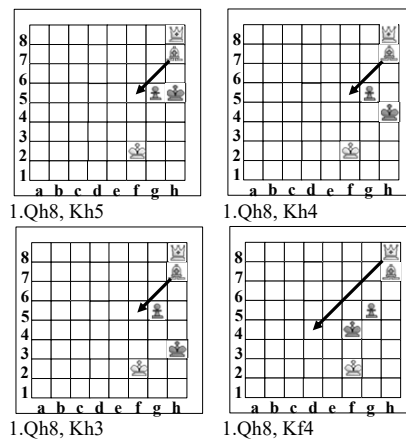
1.Qh8

1.Qh8

1.Qh8

1.Qh8

23



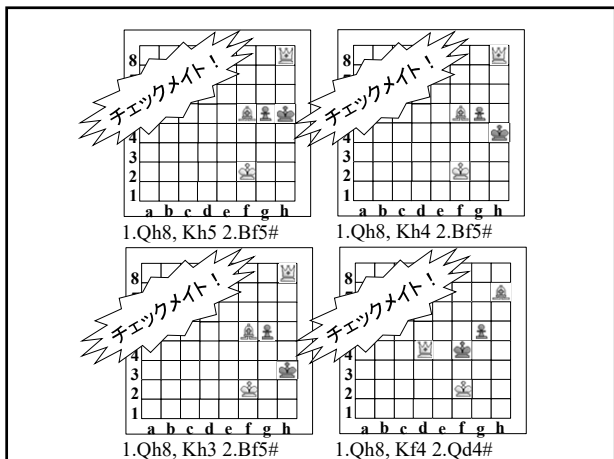
1.Qh8, Kh5

1.Qh8, Kh4

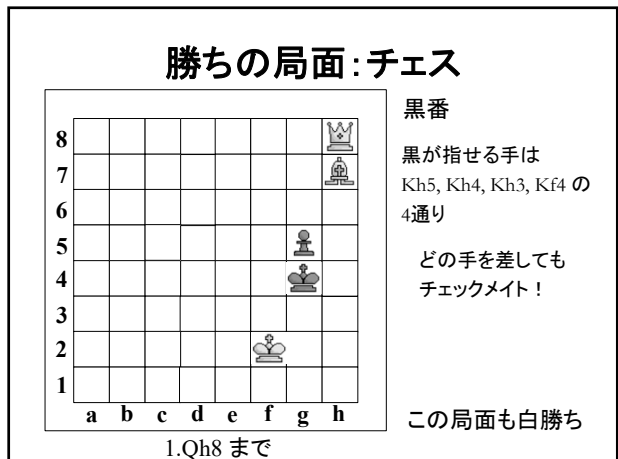
1.Qh8, Kh3

1.Qh8, Kf4

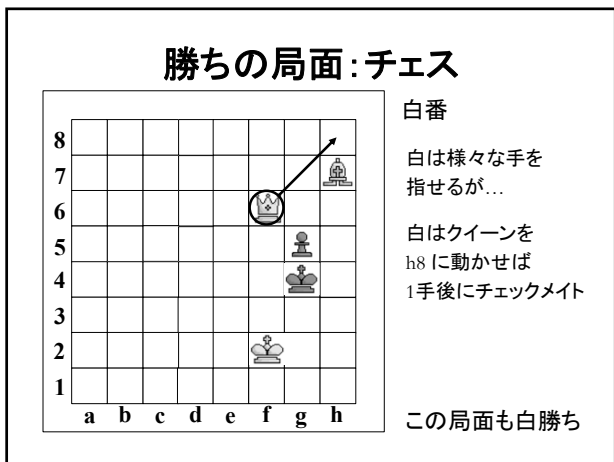
24



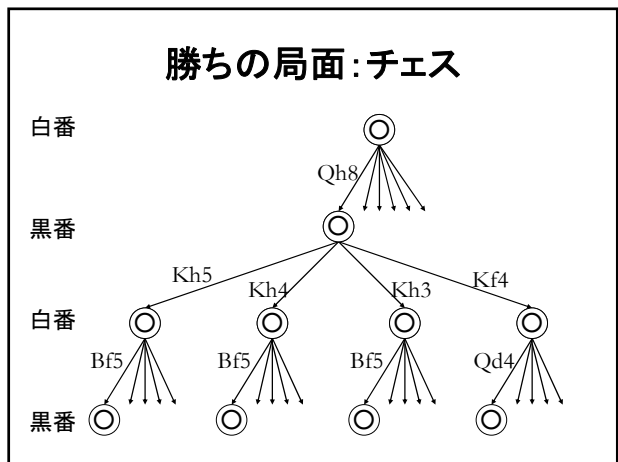
25



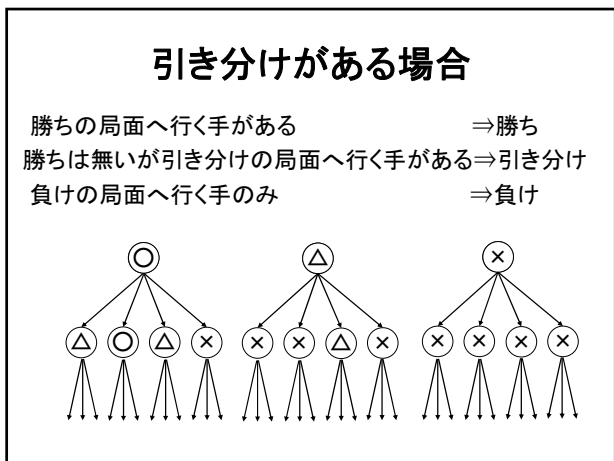
26



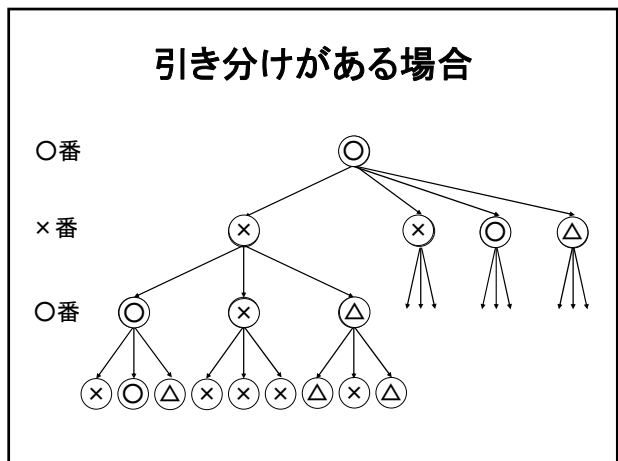
27



28



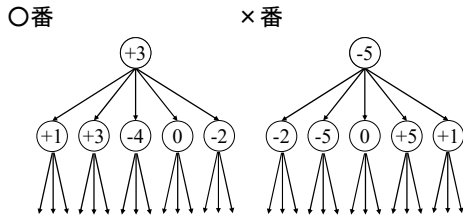
29



30

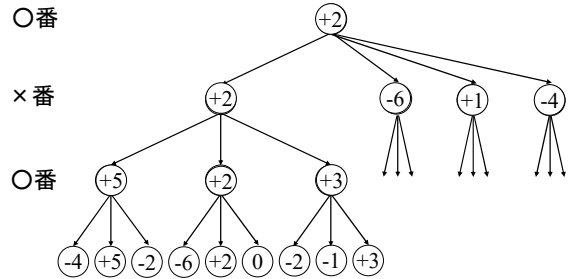
### 得点がある場合

○番: 最大値を選択  
 ×番: 最少値を選択



31

### 得点がある場合



32

### 2人零和有限確定完全情報ゲームの勝敗

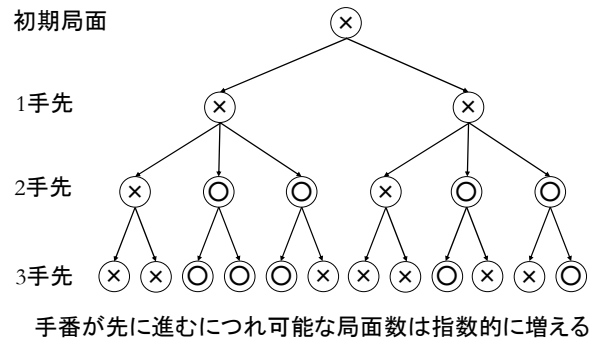
- 2人零和確定有限完全情報ゲーム
  - 勝敗は試合開始時に確定している

双方が最善手を指した場合、試合開始時にすでに  
 先手必勝・後手必勝・引き分けのいずれかが確定

しかし実際のゲームでどちらが勝つかは別問題  
 探索空間のサイズが膨大

33

### 可能な局面数



34

### 可能な局面数

		各局面での合法手数		
		2	4	8
終局までの 手数	10	1,000	1,000,000	$10^9$
	20	1,000,000	$10^{12}$	$10^{18}$
	30	$10^9$	$10^{18}$	$10^{27}$
	40	$10^{12}$	$10^{24}$	$10^{36}$
	50	$10^{15}$	$10^{30}$	$10^{45}$

終局までの手数が増えると局面数は指数的に増える

35

### 可能な局面数

ゲーム	可能な局面数
チェッカー	$10^{30}$
リバーシ	$10^{60}$
チェス	$10^{120}$
将棋	$10^{226}$
囲碁	$10^{360}$

地球全体の原子の数  $10^{50}$  個  
 ⇒地球を全てを使っても全局面を列挙するのは不可能

36

## 可能な局面数

### ■ 将棋

- 終局までの平均手数: 115手
- 各局面での合法手数: 80通り
- ⇒ 可能な局面数は  $80^{115} = 10^{226}$  通り

ただし手順前後で同一となる局面を1つと数えると  
可能な局面数は  $10^{68} \sim 10^{69}$  通りとなる[1]

[1] 篠田 正人, 将棋における実現可能局面数について,  
IPSJ Symposium Series Vol.2008 No.11, (2008), pp.116-119,  
<http://www.nara-wu.ac.jp/math/personal/shinoda/legal.pdf>

37

## ゲームの分類: 手番

- 順次型
  - 手番が順番に回ってくる
- 同時型
  - 各プレイヤーが同時に着手する
    - 多くの場合出し遅れは負け
  - 相手に見えない状態で着手を決定後、同時に公開
- 反射型
  - 先に着手したプレイヤーのみ有効

順次型は理論的には初期で勝敗が確定  
同時型の場合は？

38

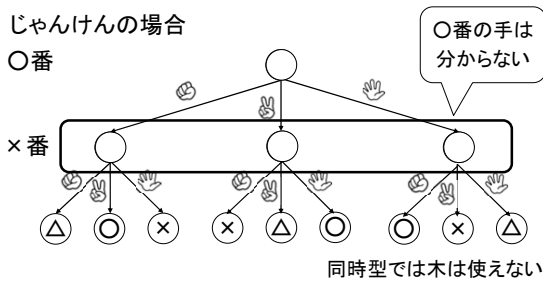
## 同時型ゲーム

双方が同時に手を決定する  
⇒ 相手の手の情報は使えない

じゃんけんの場合

○番

×番



39

## 同時型ゲーム

順序型ゲームの局面: 木を構成  
同時型ゲームの局面: 表を構成

		○番の手		
		✊	✌	✋
×番の手	✊	△	×	○
	✌	○	△	×
	✋	×	○	△

40

## 同時型ゲームの勝敗

同時型ゲームで勝敗が確定できる場合がある

×が何を選んでも  
Cを選べば○の勝ち

×	○	A	B	C	D	E
a	○	△	○	×	×	
b	×	△	○	×	×	
c	○	×	○	△	×	
d	○	○	○	○	○	
e	△	×	○	△	×	

○が何を選んでも  
dを選ぶと×の負け

この局面は  
○の勝ち

41

## 同時型ゲームの勝敗

×	○	A	B	C	D	E
a	○	△	○	×	△	
b	×	×	×	×	×	
c	○	△	○	○	×	
d	○	○	×	○	○	
e	△	×	○	△	×	

○が何を選んでも  
dを選ぶと×の勝ち

この局面は  
×の勝ち

42

### 同時型ゲームの勝敗

双方5つ選択肢があるが...

x \ o	A	B	C	D	E
a	△	×	○	×	×
b	○	×	○	○	×
c	○	×	×	△	×
d	○	○	○	○	×
e	×	×	△	○	×

×がd以外を選べば Bを選ぶと○の負け  
Eを選ぶと○の負け  
Eは選ばない  
○がE以外を選べば dを選ぶと×の負け  
dは選ばない

43

### 同時型ゲームの勝敗

双方5つ選択肢があるが  
実質的な選択肢は3通り

x \ o	A	C	D
a	△	○	×
c	○	×	△
e	×	△	○

○が選ぶべきは A,C,D のどれか  
×が選ぶべきは a,c,e のどれか

44

### 得点がある場合

双方が最も得点が高くなるように選ぶには？

x \ o	A	B	C
a	-2	+10	+4
b	+1	+5	+3
c	-5	-2	-10

×が a を選ぶなら  
○は B を選ぶべき

×が b を選ぶなら  
○は B を選ぶべき

×が c を選ぶなら  
○は B を選ぶべき

×の手に関係なく○は B を選ぶべき

45

### 得点がある場合

双方が最も得点が高くなるように選ぶには？

x \ o	A	B	C
a	-2	+10	+4
b	+1	+5	+3
c	-5	-2	-10

○の手に関係なく  
×は c を選ぶべき

○が A を選ぶなら  
×は c を選ぶべき

○が B を選ぶなら  
×は c を選ぶべき

○が C を選ぶなら  
×は c を選ぶべき

46

### 得点がある場合

双方が最も得点が高くなるように選ぶには？

x \ o	A	B	C
a	-2	+10	+4
b	+1	+5	+3
c	-5	-2	-10

○: -2点

×: +2点

○は B を選択  
×は c を選択

この局面は×の2点勝ち

47

### 得点がある場合

相手が何を選んでも  
他の選択肢に勝る選択肢があれば  
それを選択する

x \ o	A	B	C	D	E
a	0	+4	+5	-4	+2
b	-5	+5	+10	0	+4
c	-3	+2	+3	-5	0
d	-7	-4	+1	-10	-5
e	-2	-3	+2	0	-1

×が何を選んでも  
c を選べば  
一番点が高くなる

○が何を選んでも  
d を選べば  
一番点が低くなる

○は C を選択  
×は d を選択

この局面は○の1点勝ち

48



### 得点がある場合

選んではいけない選択肢がある場合もある

x	○	A	B	C
a		-10	+5	+1
b		-6	-2	-3
c		-4	+6	+10

×が a のとき  
B > C > A

×が b のとき  
B > C > A

×が c のとき  
C > B > A

選択肢 A は常に最下位  
= A は選んではいけない

49

### 得点がある場合

選んではいけない選択肢がある場合もある

x	○	A	B	C
a		-10	+5	+1
b		-6	-2	-3
c		-4	+6	+10

選択肢 c は常に最下位  
c を選んではいけない

○が A のとき  
a < b < c

○が B のとき  
b < a < c

○が C のとき  
b < a < c

50

### 得点がある場合

選んではいけない選択肢がある場合もある

x	○	A	B	C
a		-10	+5	+1
b		-6	-2	-3
c		-4	+6	+10

○は A を選ばない  
×は c を選ばない

○は B を選択  
×は b を選択  
この局面は × の 2 点勝ち

51

### 得点がある場合

相手が何を選んでも  
他の選択肢に劣る選択肢があれば  
それを削除する

x	○	A	B	C	D	E
a		-2	+4	+3	-4	+2
b		0	+5	+7	-8	+4
c		-3	+3	+2	-10	0
d		+7	+8	+10	0	+5
e		-5	+1	-2	-7	-1

×が何を選んでも  
D を選べば  
一番点が低くなる

D は選ばない

○が何を選んでも  
d を選べば  
一番点が高くなる

d は選ばない

52

### 得点がある場合

相手が何を選んでも  
他の選択肢に劣る選択肢があれば  
それを削除する

x	○	A	B	C	D	E
a		-2	+4	+3	-4	+2
b		0	+5	+7	-8	+4
c		-3	+3	+2	-10	0
d		+7	+8	+10	0	+5
e		-5	+1	-2	-7	-1

×が d 以外を選ぶと  
A を選べば  
一番点が低くなる

A は選ばない

○が d 以外を選ぶと  
b を選べば  
一番点が高くなる

b は選ばない

53

### 得点がある場合

相手が何を選んでも  
他の選択肢に劣る選択肢があれば  
それを削除する

x	○	A	B	C	D	E
a		-2	+4	+3	-4	+2
b		0	+5	+7	-8	+4
c		-3	+3	+2	-10	0
d		+7	+8	+10	0	+5
e		-5	+1	-2	-7	-1

×が b, d 以外を選ぶと  
B を選べば  
一番点が高くなる

B を選ぶ

○が A, D 以外を選ぶと  
e を選べば  
一番点が低くなる

e を選ぶ

54

### 得点がある場合

相手が何を選んでも  
他の選択肢に劣る選択肢があれば  
それを削除する

x \ o	A	B	C	D	E
a	-2	+4	+3	-4	+2
b	0	+5	+7	-8	+4
c	-3	+3	+2	-10	0
d	+7	+8	+10	0	+5
e	-5	+1	-2	-7	-1

○はBを選択  
×はcを選択  
この局面は○の1点勝ち

55

### 得点がある場合

特に優れた選択肢も劣る選択肢も無い場合

x \ o	A	B	C
a	-5	+5	+2
b	+2	0	-1
c	-4	-5	+5

×がaを選ぶとき  
 $B > C > A$

×がbを選ぶとき  
 $A > B > C$

×がcを選ぶとき  
 $C > A > B$

○は選んではいけない選択肢が無い  
×も選んではいけない選択肢が無い

この局面の勝敗は不明

56

### 得点がある場合

×が何を選んでも  
 $B > A$

×が何を選んでも  
 $C > D$

x \ o	A	B	C	D
a	+2	+4	-4	-8
b	+3	+6	-3	-4
c	-8	-3	+10	+5
d	-10	-5	+6	+3

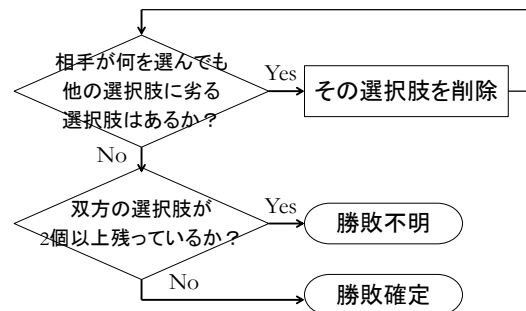
○が何を選んでも  
 $a < b$

○が何を選んでも  
 $d < c$

○はBかCを選ぶべき  
×はaかdを選ぶべき

57

### 同時型ゲームの解析フローチャート



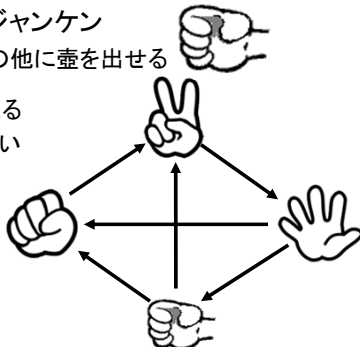
58

### フランスのジャンケン

#### ■ フランスのジャンケン

- 石・鉄・紙の他に壺を出せる

石は壺の中に入る  
鉄で壺は切れない  
紙は壺を包める



59









### フランスのジャンケン

		○番の手			
×番の手		△	×	○	○
		○	△	×	○
		×	○	△	×
		×	×	○	△

60

### 宿題:フランスのじゃんけん

■ 他の選択肢に劣る選択肢はあるか？

		○番の手			
					
×番の手		△	×	○	○
		○	△	×	○
		×	○	△	×
		×	×	○	△

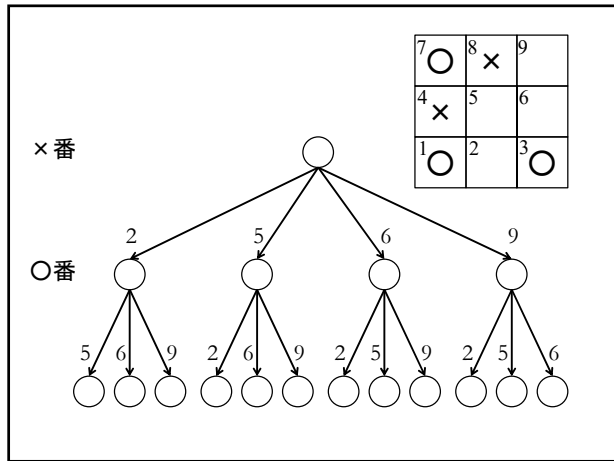
61

### 宿題:3目並べの局面

■ この局面の勝敗は？

×番	7 ○	8 ×	9
	4 ×	5	6
	1 ○	2	3 ○

62



63