

論理回路

第7回 論理回路の簡略化
— クワイン・マクラスキ法(2)

<http://www.info.kindai.ac.jp/LC>

E館3階E-331 内線5459
takasi-i@info.kindai.ac.jp

QM法による2段論理最小化

1. 最小項を併合して主項を決定する
 - i. 最小項をグループ分けする
 - ii. 隣接グループの項を併合する
 - iii. 主項を決定する
2. 必要な主項を選択する
 - i. 主項と最小項の対応表を作る
 - ii. 特異最小項を決定する
 - iii. 必須主項を決定する
 - iv. 必須主項が包含する最小項を決定する
 - v. 残る最小項を包含する主項を選択する

ここまで
自動的に
進行可能

この部分は
どの主項か
選択が必要



2段最小化のネット

- 主項の選択 主項の組み合わせは変数が増えると膨大な数に

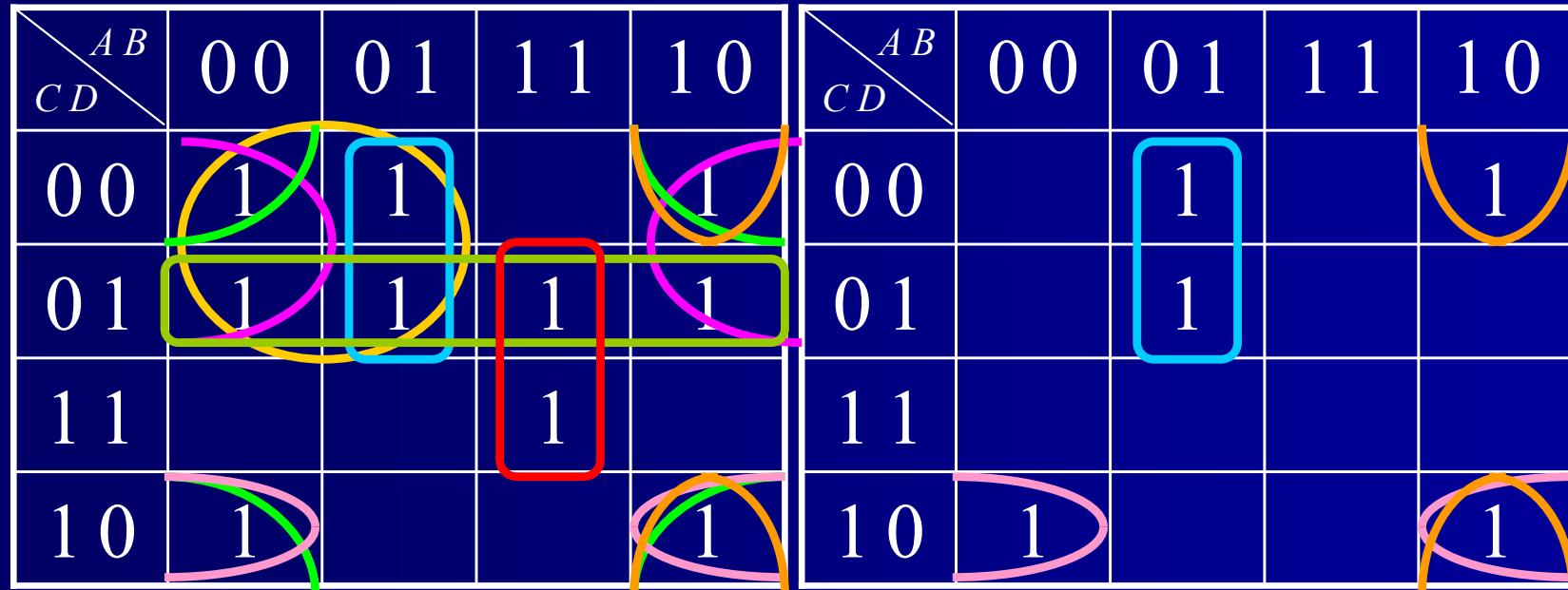
✓ 例 5変数関数の主項の選択

E

0

1

どの主項が必要？



E

0

AB	00	01	11	10
CD	00	01	11	10
00	0	8		16
01	2	10	26	18
11			30	
10	4			20

1

AB	00	01	11	10
CD	00	01	11	10
00		9		17
01		11		
11				
10	5			21

	ラベル	A	B	C	D	E
0個	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	1	0
	4	0	0	1	0	0
	8	0	1	0	0	0
	16	1	0	0	0	0
1個	5	0	0	1	0	1
	9	0	1	0	0	1

2個	10	0 1 0 1 0
	17	1 0 0 0 1
3個	18	1 0 0 1 0
	20	1 0 1 0 0
4個	11	0 1 0 1 1
	21	1 0 1 0 1
	26	1 1 0 1 0
4個	30	1 1 1 1 0

E

0

1

AB	00	01	11	10
CD	00	01	11	10
00	0	8	16	
01	2	10	26	18
11		30		
10	4		20	

AB	00	01	11	10
CD	00	01	11	10
00		9		17
01		11		
11				
10	5			21

ラベル	$ABCDE$
26,30: p	1 1 - 1 0
0,2,8,10: q	0 - 0 - 0
0,2,16,18: r	- 0 0 - 0
0,4,16,20: s	- 0 - 0 0

ラベル	$ABCDE$
2,10,18,26: t	- - 0 1 0
4,5,20,21: u	- 0 1 0 -
8,9,10,11: v	0 1 0 - -
16,17,20,21: w	1 0 - 0 -

主項	最小項	0	2	4	5	8	9	1	1	1	1	1	2	2	2	3	必須
		0	1	1	6	7	8	0	1	6	0	1	6	0	1	6	0
	26,30: p															○	○
	0,2,8,10: q	○	○			○		○									
	0,2,16,18: r	○	○							○		○					
	0,4,16,20: s	○		○						○			○				
	2,10,18,26: t		○					○			○				○		
	4,5,20,21: u			○	○									○	○		
	8,9,10,11: v					○	○	○	○								
	16,17,20,21: w									○	○		○	○			
	選択																

主項最小項対応表作成

主項	最小項	0	2	4	5	8	9	1	1	1	1	1	2	2	2	3	必須	
	26,30: p															○	◎	✓
	0,2,8,10: q	○	○			○		○										
	0,2,16,18: r	○	○							○		○						
	0,4,16,20: s	○		○						○			○					
	2,10,18,26: t		○					○				○			○			
	4,5,20,21: u			○	◎								○	○			✓	
	8,9,10,11: v					○	◎	○	○	◎							✓	
	16,17,20,21: w									○	◎		○	○			✓	
	選択																	

特異最小項・必須主項決定

主項	最小項	0	2	4	5	8	9	1	1	1	1	1	2	2	2	3	必須
26,30: p															○	◎	✓
0,2,8,10: q	○	○			○		○										
0,2,16,18: r	○	○							○		○						
0,4,16,20: s	○		○						○			○					
2,10,18,26: t		○						○			○			○			
4,5,20,21: u			○	◎									○	○			✓
8,9,10,11: v					○	◎	○	○	○								✓
16,17,20,21: w									○	◎		○	○				✓
選択			✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	

残りの最小項はどの主項を選ぶ？

主項	最小項	0	2	4	5	8	9	0	1	1	1	1	1	2	2	2	3	必須
26,30: p																		✓
0,2,8,10: q	○	○			○		○											
0,2,16,18: r	○	○							○					○				
0,4,16,20: s	○		○							○			○		○			
2,10,18,26: t		○						○					○			○		
4,5,20,21: u				○	○									○	○			✓
8,9,10,11: v						○	○	○	○									✓
16,17,20,21: w										○	○		○	○				✓
選択									✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	

チェックの付いた項はもう気にしなくて良い

⇒チェックの付いた項を消す

主項	最小項	0	2	1	必須
26,30: p				8	✓
0,2,8,10: q	○	○			
0,2,16,18: r	○	○	○		
0,4,16,20: s	○				
2,10,18,26: t	○	○			
4,5,20,21: u					✓
8,9,10,11: v					✓
16,17,20,21: w					✓
選択					

q は r に包含される

$\Rightarrow q$ は不要

s, t も r に包含される

$\Rightarrow s, t$ も不要

必須にチェックが付いていない
他の項に包含される主項を消す

主項	最小項	0	2	1	必須
26,30: p				✓	
0,2,16,18: r	◎	◎	◎		✓
4,5,20,21: u				✓	
8,9,10,11: v				✓	
16,17,20,21: w				✓	
選択	✓	✓	✓		

縮小された表では
0,2,18も特異最小項
⇒ 縮小された表では
 r も必須主項

まだ選択されない項が残っていれば縮小を繰り返す

全ての項が選択されたのでこれで終了

$$f = p + r + u + v + w$$

$$= \overline{ABD}\overline{E} + \overline{BCE}\overline{\overline{\overline{E}}} + \overline{BCD}\overline{\overline{D}} + \overline{ABC}\overline{\overline{\overline{C}}} + \overline{ABD}\overline{\overline{\overline{D}}}$$

対応表の縮小

- 主項最小項対応表を縮小する
 1. 特異最小項の選択
 2. 必須主項の選択
 3. 必須主項がカバーした最小項を消す
(横方向の縮小)
 4. 他の主項に包含される主項を消す
(縦方向の縮小)
- 1.～4.の繰り返しで表を縮小していく
(注意) ただし、この方法は途中でそれ以上縮小できなくなる場合もある

表を縮小できないケース

$$f = \overline{ABC} + \overline{A}\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}\overline{C}$$

+ $\overline{A}\overline{B}C + ABC + A\overline{B}C$ の最小積和形

		AB	00	01	11	10
		C	0	1	1	1
C	0	1	1	1		
	1	1		1	1	

必須主項が無いので縮小不可能

2段論理最小化の理論

- 理論的に最小積和形を得る方法は?
 - f : n 個の値1の最小項を持つ論理関数
 - f_m : f の最小積和形
 - m_i : f の最小項 ($1 \leq i \leq n$)
 - S_i : m_i を包含する f の主項の論理和

2段最小論理化の理論

例: $f = X\bar{Y}Z + X\bar{Y}\bar{Z} + X\bar{Y}\bar{Z} + \bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$

4個の値1の最小項を持つ論理関数

$$m_1 = X\bar{Y}Z, m_2 = X\bar{Y}\bar{Z}, m_3 = X\bar{Y}\bar{Z}, m_4 = \bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$$

$$p = X\bar{Y} = m_1 + m_2, q = X\bar{Z} = m_2 + m_3, r = \bar{Y}\bar{Z} = m_3 + m_4$$

$$S_1 = p, S_2 = p + q, S_3 = q + r, S_4 = r$$

$$f_m = p + r = X\bar{Y} + \bar{Y}\bar{Z}$$

\diagdown XY	00	01	11	10
\backslash Z	0	m_4	m_3	m_2
1				m_1

最小項 主項	m_1	m_2	m_3	m_4
p	○	○		
q		○	○	
r			○	○

ある最小項の包含条件

- 定理：ある最小項の包含条件
 - U_i : 最小積和形 f_m の論理積項がある最小項 m_i を包含する条件

$$S_i = 1$$

(証明) S_i は m_i を包含する全ての主項の論理和 $S_i = 1$ ならば主項のいずれかが m_i を包含する

例 : $S_i = p + q + r$

$S_i = 1 \Rightarrow p = 1$ または $q = 1$ または $r = 1$

全ての最小項の包含条件

■ 定理：全ての最小項の包含条件

– U : 最小積和形 f_m の論理積項が
全ての最小項 m_i を包含する条件

$$S_1 \cdot S_2 \cdot \dots \cdot S_n = 1$$

(証明) $S_i = 1 \Rightarrow$ 最小項 m_i を包含(定理2.6)

よって全ての主項を包含する条件は

$S_1 = 1$ かつ $S_2 = 1$ かつ ... かつ $S_n = 1$

すなわち $S_1 \cdot S_2 \cdot \dots \cdot S_n = 1$

論理数学による主項の求め方

- 条件 $U = S_1 \cdot S_1 \cdot \dots \cdot S_n$ を展開して積和形にする
- 1.から主項数が最小の論理積項を選ぶ
- 2.を構成する主項をORで結ぶ

条件 U を求めるには、QM法で用いた
主項-最小項対応表を用いるとよい

最小項 主項	m_1	m_2	m_3	m_4
p	○	○	○	
q		○		○
r	○			○

$$S_1 = p + r, S_2 = p + q,$$

$$S_3 = p, S_4 = q + r,$$

$$U = (p + r)(p + q)$$

$$p(q + r)$$

論理数学による主項選択の例

例：4つの最小項から成る論理関数 f

最小項 主項	m_1	m_2	m_3	m_4
p	○	○	○	
q		○		○
r	○			○

$$\begin{aligned}U &= S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot S_4 \\&= (p+r)(p+q)r(q+r) \\&= pq + pr\end{aligned}$$

よって $pq = 1$ または $pr = 1$ のとき
全ての最小項が選択される

$$f_m = p + q \text{ または } p + r$$

論理数学による主項選択の例

$$\text{例: } f = X\bar{Y}Z + X\bar{Y}\bar{Z} + XY\bar{Z} + \bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$$

$$m_1 = X\bar{Y}Z, m_2 = X\bar{Y}\bar{Z}, m_3 = XY\bar{Z}, m_4 = \bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$$

$X\bar{Y}$	0 0	0 1	1 1	1 0
Z	0	1	1	1
1				1

$$p = X\bar{Y} = m_1 + m_2$$

$$q = X\bar{Z} = m_2 + m_3$$

$$r = Y\bar{Z} = m_3 + m_4$$

論理数学による主項選択の例

$$\text{例: } f = X\bar{Y}\bar{Z} + X\bar{Y}\bar{Z} + X\bar{Y}\bar{Z} + \bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$$

$$m_1 = X\bar{Y}\bar{Z}, m_2 = X\bar{Y}\bar{Z}, m_3 = X\bar{Y}\bar{Z}, m_4 = \bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$$

最小項 主項	m_1	m_2	m_3	m_4
p	○	○		
q		○	○	
r			○	○

$$p = X\bar{Y} = m_1 + m_2$$

$$q = X\bar{Z} = m_2 + m_3$$

$$r = Y\bar{Z} = m_3 + m_4$$

$$S_1 = p, S_2 = p + q, S_3 = q + r, S_4 = r$$

論理数学による主項選択の例

例: $f = \overline{XYZ} + \overline{Y\overline{Z}} + \overline{XY\overline{Z}} + \overline{\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}}$

$$m_1 = \overline{XYZ}, m_2 = \overline{Y\overline{Z}}, m_3 = \overline{XY\overline{Z}}, m_4 = \overline{\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}}$$

$$p = \overline{XY} = m_1 + m_2, q = \overline{Z} = m_2 + m_3, r = \overline{YZ} = m_3 + m_4$$

$$S_1 = p, S_2 = p + q, S_3 = q + r, S_4 = r$$

$$U = S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot S_4 = p(p+q)(q+r)r$$

$= p r$ 論理積項(の1つ)を

$$f_m = p + r = \overline{XY} + \overline{YZ}$$
 論理和に変換

例題

$$f = \overline{ABCDE} + \overline{ABCDE} + \overline{ABCDE} + \overline{ABCDE} + \overline{ABCDE}$$
$$+ \overline{ABCDE} + \overline{ABCDE} + \overline{ABCDE} + \overline{ABCDE} + \overline{ABCDE}$$
$$+ \overline{ABCDE} + \overline{ABCDE} + \overline{ABCDE} + \overline{ABCDE} + \overline{ABCDE}$$

E

0

1

\backslash	AB	00	01	11	10	
CD		0	8	16		
00	0	8			17	
01	2	10	26	18		11
11			30			
10	4			20		21

これを論理数学で解くと？

主項	最小項	0	2	4	5	8	9	1	1	1	1	1	2	2	2	3	必須
26,30: p																○	○
0,2,8,10: q	○	○			○		○										
0,2,16,18: r	○	○							○		○						
0,4,16,20: s	○		○						○		○		○				
2,10,18,26: t		○						○			○			○		○	
4,5,20,21: u			○	○										○	○		
8,9,10,11: v					○	○	○	○									
16,17,20,21: w										○	○		○	○			
選択																	

主項最小項対応表作成

最小項15個

主項8個

S_1	$q + r + s$	S_2	$q + r + t$	S_3	$s + u$
S_4	u	S_5	$q + v$	S_6	v
S_7	$p + t + v$	S_8	v	S_9	$r + s + w$
S_{10}	w	S_{11}	$r + t$	S_{12}	$s + u + w$
S_{13}	$u + w$	S_{14}	$p + t$	S_{15}	p

$$U = (q + r + s)(q + r + t)(s + u)u(q + v)$$

$$v(p + t + v)v(r + s + w)w(r + t)$$

$$(s + u + w)(u + w)(p + t)p$$

$$= pruvw + pstuvw + pqruvw$$

積項の中で
一番大きな
項を選択

$$f_m = p + r + u + v + w$$

だがこれは計算が
ややこしい...

論理数学による手順

1. 最小項を併合して主項を決定する
2. 主項-最小項対応表を作成する
3. 必須主項の選択・表の縮小をする
4. 論理数学を用いて主項を選択する

主項	最小項	0	2	4	5	8	9	1	1	1	1	1	2	2	2	3	必須
26,30: p															○	◎	✓
0,2,8,10: q	○	○			○		○										
0,2,16,18: r	○	○							○		○						
0,4,16,20: s	○		○						○			○					
2,10,18,26: t		○						○				○			○		
4,5,20,21: u			○	◎									○	○			✓
8,9,10,11: v					○	◎	○	○	○								✓
16,17,20,21: w									○	◎		○	○				✓
選択																	

特異最小項・必須主項決定

主項	最小項	0	2	4	5	8	9	1	1	1	1	1	2	2	2	3	必須
	26,30: p														○	◎	✓
	0,2,8,10: q	○	○			○		○									
	0,2,16,18: r	○	○							○		○					
	0,4,16,20: s	○		○						○			○				
	2,10,18,26: t		○					○				○			○		
	4,5,20,21: u			○	◎								○	○			✓
	8,9,10,11: v					○	◎	○	○	○							✓
	16,17,20,21: w									○	○		○	○			✓
	選択			✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	

必須主項がカバーする最小項決定

主項	最小項			必須
	0	2	8	
26,30: p				✓
0,2,8,10: q	○	○		
0,2,16,18: r	○	○	○	
0,4,16,20: s	○			
2,10,18,26: t		○	○	
4,5,20,21: u				✓
8,9,10,11: v				✓
16,17,20,21: w				✓
選択				

横方向の縮小

$$S_1 = q + r + s$$

$$S_2 = q + r + t$$

$$S_3 = r + t$$

$$U = (q + r + s)(q + r + t)(r + t) \\ = r + q \ t + s \ t$$

r または q と t または s と t

$$f_m = p + r + u + v + w$$

ドントケアを含む最小化

- ドントケアは 1 でも 0 でもいい
⇒ 必要に応じて 0,1 の都合のいい方と看做す

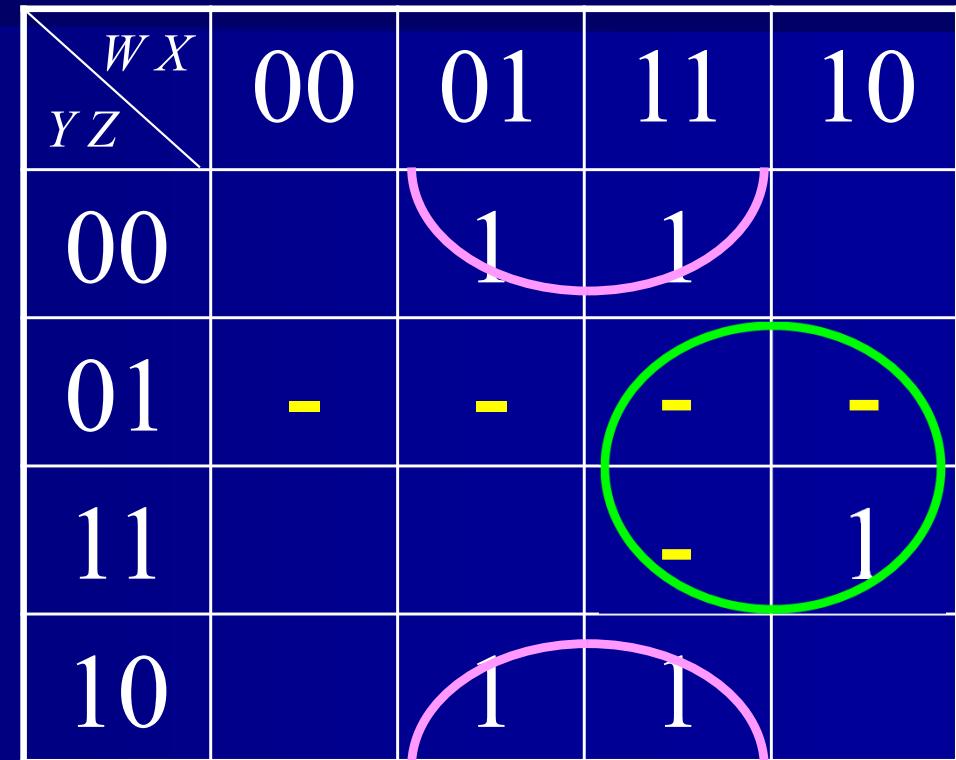
W	X	Y	Z	f
0	0	0	0	
0	0	0	1	-
0	0	1	0	
0	0	1	1	
0	1	0	0	1
0	1	0	1	-
0	1	1	0	1
0	1	1	1	

W	X	Y	Z	f
1	0	0	0	
1	0	0	1	-
1	0	1	0	
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	-
1	1	1	0	1
1	1	1	1	-

カルノー図による最小化

W	X	Y	Z	f
0	0	0	0	
0	0	0	1	-
0	0	1	0	
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	-
0	1	1	0	1
0	1	1	1	-
1	1	0	0	1
1	1	0	1	-
1	1	1	0	1
1	1	1	1	-

W	X	Y	Z	f
1	0	0	0	
1	0	0	1	-
1	0	1	0	
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	-
1	1	1	0	1
1	1	1	1	-



$$f = X\bar{Z} + WZ$$

QM法による最小化

ドントケアには
△を付ける

$WXYZ$	f
0 0 0 0	
0 0 0 1	-
0 0 1 0	
0 0 1 1	
0 1 0 0	1
0 1 0 1	-
0 1 1 0	1
0 1 1 1	

$WXYZ$	f
1 0 0 0	
1 0 0 1	-
1 0 1 0	
1 0 1 1	1
1 1 0 0	1
1 1 0 1	-
1 1 1 0	1
1 1 1 1	-

	ラベル	$WXYZ$	主項
1個	$\Delta 1$	0 0 0 1	
	4	0 1 0 0	
2個	$\Delta 5$	0 1 0 1	
	6	0 1 1 0	
3個	$\Delta 9$	1 0 0 1	
	12	1 1 0 0	
4個	11	1 0 1 1	
	$\Delta 13$	1 1 0 1	
	14	1 1 1 0	
	$\Delta 15$	1 1 1 1	

ドントケアのある項の併合

	ラベル	WXYZ	主項
1個	△1	0 0 0 1	✓
	4	0 1 0 0	✓
2個	△5	0 1 0 1	✓
	6	0 1 1 0	
3個	△9	1 0 0 1	✓
	12	1 1 0 0	
4個	11	1 0 1 1	
	△13	1 1 0 1	
4個	14	1 1 1 0	
	△15	1 1 1 1	



	ラベル	WXYZ	主項
1個	△1,5	0 - 0 1	
	△1,9	- 0 0 1	
2個	4,5	0 1 0 -	
2個			

ドントケア同士の併合は△有り
1とドントケアの併合は△無し

ドントケアのある項の併合

	ラベル	WXYZ	主項
1個	△1	0 0 0 1	✓
	4	0 1 0 0	✓
2個	△5	0 1 0 1	✓
	6	0 1 1 0	✓
	△9	1 0 0 1	✓
	12	1 1 0 0	✓
3個	11	1 0 1 1	✓
	△13	1 1 0 1	✓
4個	14	1 1 1 0	✓
	△15	1 1 1 1	



	ラベル	WXYZ	主項
1個	△1,5	0 - 0 1	
	△1,9	- 0 0 1	
2個	4,5	0 1 0 -	
	4,6	0 1 - 0	
	4,12	- 1 0 0	
	△5,13	- 1 0 1	
	6,14	- 1 1 0	
	9,11	1 0 - 1	
	△9,13	1 - 0 1	

	ラベル	WXYZ	主項
1個	$\Delta 1,5$	0 - 0 1	✓
	$\Delta 1,9$	- 0 0 1	✓
	4,5	0 1 0 -	✓
	4,6	0 1 - 0	✓
	4,12	- 1 0 0	✓
	$\Delta 5,13$	- 1 0 1	✓
	6,14	- 1 1 -	✓
	9,11	1 0 - 1	✓
	$\Delta 9,13$	1 - 0 1	✓
	12,13	1 1 0 -	✓
2個	12,14	1 1 - 0	✓
	11,15	1 - 1 1	✓
	$\Delta 13,15$	1 1 - 1	✓
	14,15	1 1 1 -	✓

	ラベル	WXYZ	主項
1個	$\Delta 1,5,9,13$	-- 0 1	
	4,5,12,13	- 1 0 -	p
2個	4,6,12,14	- 1 - 0	q
	9,11,13,15	1 -- 1	r
	12,13,14,15	1 1 - -	s

最後まで Δ の付いている項
=ドントケアのみの項

Δ の付いた項は不要

主項は p, q, r, s の4つ

主項最小項対応表

主項	最小項	4	△ 5	6	△ 9	11	12	△ 13	14	△ 15	必須
4,5,12,13: p	○	○				○	○				
4,6,12,14: q	○			○		○		○	○		
9,11,13,15: r					○	○		○		○	
12,13,14,15: s							○	○	○	○	
選択											

ドントケアの最小項は選択する必要無し

ドントケアの最小項は対応表に不要

主項の選択

主項	最小項	4	6	11	12	14	必須
4,5,12,13: p		○			○		
4,6,12,14: q		○	◎		○	○	✓
9,11,13,15: r				◎			✓
12,13,14,15: s					○	○	
選択							

特異最小項・必須主項決定

主項の選択

主項	最小項	4	6	11	12	14	必須
4,5,12,13: p	○				○		
4,6,12,14: q	○	○			○	○	✓
9,11,13,15: r				○			✓
12,13,14,15: s					○	○	
選択	✓	✓	✓	✓	✓	✓	

必須主項がカバーする最小項決定

最小積和形は $q + r = X\bar{Z} + WZ$

演習問題: 表の縮小による最小化

- 次の真理値表の最小積和形を求めよ

A	B	C	D	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	
0	0	1	0	
0	0	1	1	
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	
0	1	1	1	

A	B	C	D	f
1	0	0	0	
1	0	0	1	
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	
1	1	0	1	1
1	1	1	0	
1	1	1	1	1

	ラベル	$A_{(8)}$	$B_{(4)}$	$C_{(2)}$	$D_{(1)}$	主項
1が0個	0	0	0	0	0	
1が1個	$4 = 2^2$	0	1	0	0	
1が2個	$5 = 2^2 + 2^0$	0	1	0	1	
	$10 = 2^3 + 2^1$	1	0	1	0	
1が3個	$11 = 2^3 + 2^1 + 2^0$	1	0	1	1	
	$13 = 2^3 + 2^2 + 2^0$	1	1	0	1	
1が4個	$15 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$	1	1	1	1	

\backslash AB	00	01	11	10
CD	00	4		
00	0	4		
01		5	13	
11			15	11
10				10

最小項を
1の少ない順に並べ
グループ分けする

	ラベル	<i>A B C D</i>	主項
0個	0	0 0 0 0	✓
1個	4	0 1 0 0	✓
2個	5	0 1 0 1	✓
	10	1 0 1 0	✓
3個	11	1 0 1 1	✓
	13	1 1 0 1	✓
4個	15	1 1 1 1	✓

	ラベル	<i>A B C D</i>	主項
0個	0,4	0 - 0 0	<i>p</i>
1個	4,5	0 1 0 -	<i>q</i>
2個	5,13	- 1 0 1	<i>r</i>
	10,11	1 0 1 -	<i>s</i>
3個	11,15	1 - 1 1	<i>t</i>
	13,15	1 1 - 1	<i>u</i>

<i>AB</i> \\ <i>CD</i>	00	01	11	10
00	0	4		
01		5	13	
11			15	11
10				10

各行それぞれが
隣接グループの行と
併合可能かチェック

チェックが付かなかった
項が主項

主項	最小項	0	4	5	10	11	13	15	必須
$0,4:p$	○	○							
$4,5:q$		○	○						
$5,13:r$			○			○			
$10,11:s$				○	○				
$11,15:t$					○		○		
$13,15:u$						○	○		
選択									

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00	0	4		
01		5	13	
11			15	11
10				10

主項と最小項の
対応表を作る

主項	最小項	0	4	5	10	11	13	15	必須
$0,4:p$	◎	○							✓
$4,5:q$		○	○						
$5,13:r$			○			○			
$10,11:s$				◎	○				✓
$11,15:t$					○		○		
$13,15:u$						○	○		
選択									

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	4		
01		5	13	
11			15	11
10				10

特異最小項・
必須主項を決定

主項 \ 最小項	0	4	5	10	11	13	15	必須
$0,4:p$	◎	○						✓
$4,5:q$		○	○					
$5,13:r$			○			○		
$10,11:s$				◎	○			✓
$11,15:t$					○		○	
$13,15:u$						○	○	
選択	✓	✓		✓	✓			

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	4		
01		5	13	
11			15	11
10				10

必須主項が包含する
最小項を決定

主項	最小項	0	4	5	10	11	13	15	必須
$0,4:p$	◎	○							✓
$4,5:q$		○	○						
$5,13:r$			○			○			
$10,11:s$				◎	○				✓
$11,15:t$					○		○		
$13,15:u$						○	○		
選択		✓	✓		✓	✓			

$CD \backslash AB$	00	01	11	10
$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	4		
01		5	13	
11			15	11
10				10

チェックの付いた
最小項を削除

主項	最小項	5	13	15	必須
	0,4: p				✓
	4,5: q	○			
	5,13: r	○	○		
	10,11: s				✓
	11,15: t			○	
	13,15: u	○	○		
選択					

他の主項に
包含される
チェックの無い
主項を削除

$\diagup AB$	00	01	11	10
$\diagdown CD$	00	01	11	10
	-	-		
	01	5	13	
	11		15	-
	10			-

主項	最小項	5	13	15	必須
0,4: p					✓
5,13: r	◎	○			✓
10,11: s					✓
13,15: u		○	◎		✓
選択	✓	✓	✓		

縮小した表で
特異最小項・
必須主項の決定

必須主項が包含する
最小項決定

\backslash	AB	00	01	11	10
CD	00	-	-		
00	00	-	-		
01	01	(5)	13		
11	11		15	-	
10	10			-	

$$\begin{aligned}
 f_m &= p + r + s + u \\
 &= \overline{ACD} + \overline{BCD} \\
 &\quad + \overline{ABC} + \overline{ABD}
 \end{aligned}$$

演習問題: 論理数学による主項選択

■ 最適な主項の組み合わせは?

最小項 主項	m_1	m_2	m_3	m_4
p	○			
q	○	○		
r			○	
s			○	○

$$S_1 = p + q$$

$$S_2 = q$$

$$S_3 = r + s$$

$$S_4 = s$$

$$U = (p + q) q (r + s) s = q s$$

q と s

演習問題: ドントケアを含む最小化

- 次の真理値表の最小積和形を求めよ

A	B	C	D	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	
0	0	1	1	
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	
0	1	1	1	

A	B	C	D	f
1	0	0	0	
1	0	0	1	-
1	0	1	0	1
1	0	1	1	-
1	1	0	0	
1	1	0	1	-
1	1	1	0	1
1	1	1	1	-

	ラベル	$A_{(8)}$	$B_{(4)}$	$C_{(2)}$	$D_{(1)}$	主項
1が0個	0	0	0	0	0	
1が1個	$1 = 2^0$	0	0	0	1	
	$4 = 2^2$	0	1	0	0	
1が2個	$5 = 2^2+2^0$	0	1	0	1	
	$\Delta 9 = 2^3+2^0$	1	0	0	1	
	$10 = 2^3+2^1$	1	0	1	0	
1が3個	$\Delta 11 = 2^3+2^1+2^0$	1	0	1	1	
	$\Delta 13 = 2^3+2^2+2^0$	1	1	0	1	
	$14 = 2^3+2^2+2^1$	1	1	1	0	
1が4個	$\Delta 15 = 2^3+2^2+2^1+2^0$	1	1	1	1	

\backslash CD	$A B$	00	01	11	10
00	0 1	4 1			
01	1 1	5 1	13 -	9 -	
11			15 -	11 -	
10			14 1	10 1	

最小項を
1の少ない順に並べ
グループ分けする

	ラベル	A B C D	主項
0個	0	0 0 0 0	✓
1個	1	0 0 0 1	✓
	4	0 1 0 0	✓
2個	5	0 1 0 1	✓
	△9	1 0 0 1	✓
3個	10	1 0 1 0	✓
	△11	1 0 1 1	✓
	△13	1 1 0 1	✓
4個	14	1 1 1 0	✓
	△15	1 1 1 1	✓

$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00	0 1	4 1		
01	1 1	5 1	13 -	9 -
11			15 -	11 -
10			14 1	10 1

	ラベル	A B C D	主項
0個	0,1	0 0 0 -	
	0,4	0 - 0 0	
1個	1,5	0 - 0 1	
	1,9	- 0 0 1	
2個	4,5	0 1 0 -	
	5,13	- 1 0 1	
3個	△9,11	1 0 - 1	
	△9,13	1 - 0 1	
	10,11	1 0 1 -	
4個	10,14	1 - 1 0	
	△11,15	1 - 1 1	
	△13,15	1 1 - 1	
5個	14,15	1 1 1 -	

	ラベル	A B C D	主項
0個	0,1	0 0 0 -	✓
	0,4	0 - 0 0	✓
	1,5	0 - 0 1	✓
1個	1,9	- 0 0 1	✓
	4,5	0 1 0 -	✓
	5,13	- 1 0 1	✓
2個	△9,11	1 0 - 1	✓
	△9,13	1 - 0 1	✓
	10,11	1 0 1 -	✓
3個	10,14	1 - 1 0	✓
	△11,15	1 - 1 1	✓
	△13,15	1 1 - 1	✓
	14,15	1 1 1 -	✓

	ラベル	A B C D	主項
0個	0,1,4,5	0 - 0 -	p
1個	1,5,9,13	- - 0 1	q
2個	△9,11,13,15	1 - - 1	
	10,11,14,15	1 - 1 -	r

チェックが付かなかった
△の無い項が主項

$$p = \overline{A}\overline{C}, q = \overline{C}\overline{D}, r = \overline{A}\overline{C}$$

$\backslash CD$	AB	00	01	11	10
00	0 1	4 1			
01	1 1	5 1	13 -	9 -	
11			15 -	11 -	
10			14 1	10 1	

主項	最小項	0	1	4	5	10	14	必須
		0	1	4	5	10	14	必須
	0,1,4,5: p	○	○	○	○			
	1,5,9,13: q		○		○			
	10,11,14,15: r					○	○	
選択								

\backslash	AB	00	01	11	10
CD	00	0 1	4 1		
00	0 1	4 1			
01	1 1	5 1	13 -	9 -	
11			15 -	11 -	
10			14 1	10 1	

主項と最小項の
対応表を作る
ドントケアの
最小項は不要

主項	最小項	0	1	4	5	10	14	必須
		○	○	○	○			✓
	$0,1,4,5:p$	○		○				
	$1,5,9,13:q$		○		○			
	$10,11,14,15:r$					○	○	✓
選択								

\backslash	AB	00	01	11	10
CD	00	0 1	4 1		
00	0 1	4 1			
01	1 1	5 1	13 -	9 -	
11			15 -	11 -	
10			14 1	10 1	

特異最小項・
必須主項の決定

主項	最小項	0	1	4	5	10	14	必須
		◎	○	◎	○			✓
$0,1,4,5:p$								
$1,5,9,13:q$		○			○			
$10,11,14,15:r$						◎	◎	✓
選択		✓	✓	✓	✓	✓	✓	

\backslash	AB	00	01	11	10
CD	00	0 1	4 1		
00	0 1	4 1			
01	1 1	5 1	13 -	9 -	
11			15 -	11 -	
10			14 1	10 1	

必須主項が包含する
最小項の決定

$$\begin{aligned}
 f_m &= p + r \\
 &= \overline{AC} + \overline{AC}
 \end{aligned}$$

問題: ドントケアを含む最小化

- 次の真理値表の最小積和形を求めよ

W	X	Y	Z	F
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	-
0	1	0	1	-
0	1	1	0	
0	1	1	1	

W	X	Y	Z	f
1	0	0	0	
1	0	0	1	-
1	0	1	0	
1	0	1	1	1
1	1	0	0	-
1	1	0	1	-
1	1	1	0	
1	1	1	1	