論理回路

第6回 論理回路の簡略化

— クワイン･マクラスキ法(1)

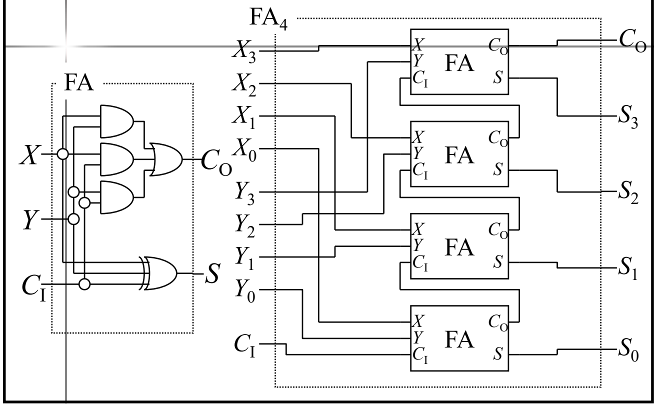
http://www.info.kindai.ac.jp/LC

E館3階E-331 内線5459

takasi-i@info.kindai.ac.jp

1

加算器



2

減算

■ 除数を 2 の補数に変換してから加算

X の 2 の補数 : $2^n - X$

例: 5 (0101) の 2 の補数(4ビット)

16-5 = 11(1011)

① 全てのビットを反転させる

② 1 を加える

0101

1010 ①

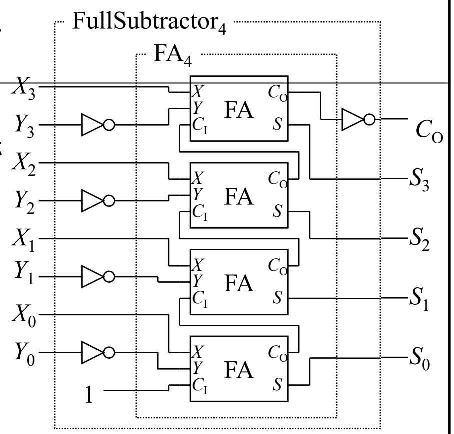
1011 ②

3

減算器

$X - Y$

1. Y をビット反転
2. 1を足す
3. X に加える



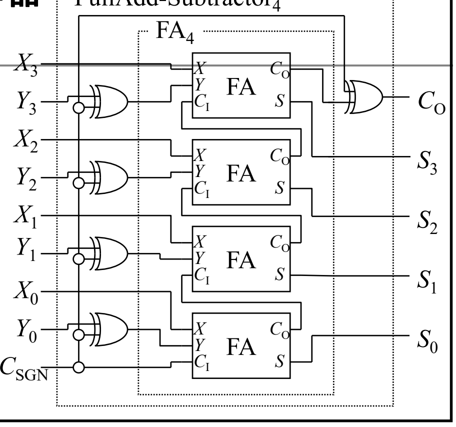
4

加減算器

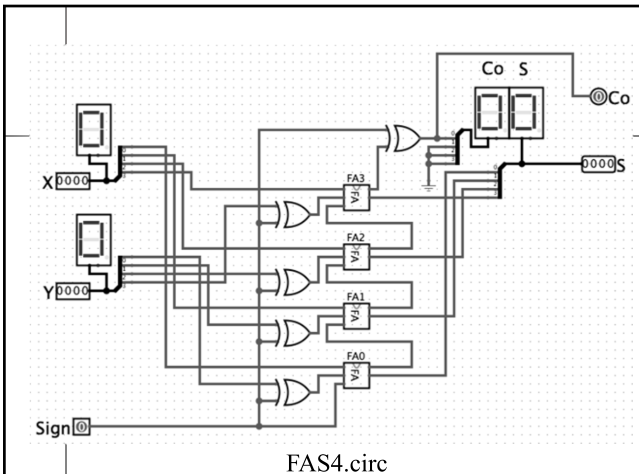
制御信号 C_SGN

$X + Y\ (C_\mathrm{SGN}=0)$

$X - Y\ (C_\mathrm{SGN}=1)$



5



FAS4.circ

6

乗算

10進数の乗算

14
×13
42 (14×3)
+14 (14×1)
182

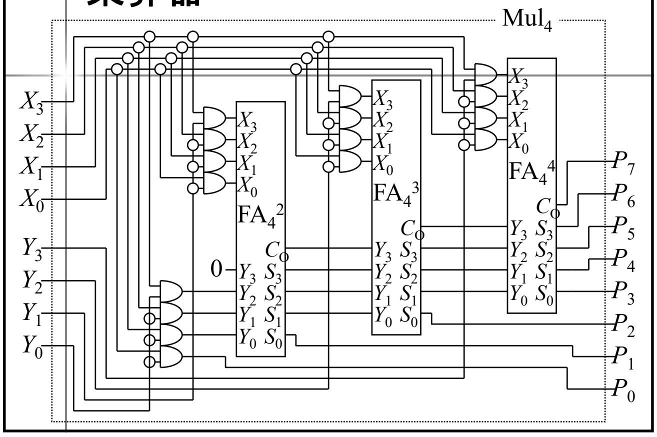
2進数の乗算

1110 (14)
×1101 (13)
1110 (1110×1)
0000 (1110×0)
1110 (1110×1) 左2ビットシフト
+1110 (1110×1) 左3ビットシフト
10110110 (182)

2進数の乗算は、左シフトと加算のみで計算可能

7

乗算器



8

カルノー図

- カルノー図:関数値を2次元格子図で表現
  - 論理関数を直感的に把握する表現法
  - 論理回路の最適化設計を直感的に行える

Z \ X Y	0 0	0 1	1 1	1 0
0	0	0	1	0
1	1	1	1	0

$$\overline{X}\cdot Z + X\cdot Y$$

9

5変数関数のカルノー図

- 5変数関数 $f=(X,Y,Z,U,V)$ のカルノー図

V = 0

Z U \ X Y	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0		1		
0 1	1			
1 1	1			1
1 0				1

V = 1

Z U \ X Y	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0		1		
0 1				
1 1				1
1 0				1

10

6変数関数のカルノー図

- 6変数関数 $f=(X,Y,Z,U,V,W)$ のカルノー図

V = 0, W = 0

Z U \ X Y	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0			1	
0 1				1
1 1				1
1 0	1			

V = 1, W = 0

Z U \ X Y	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0			1	
0 1				
1 1				
1 0	1			

V = 0, W = 1

Z U \ X Y	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0				
0 1				1
1 1				1
1 0	1			

V = 1, W = 1

Z U \ X Y	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0			1	
0 1				
1 1				
1 0	1			

11

カルノー図の特徴

- 長所
  - 直感的で分かり易い
  - 必要な主項の選択が容易
- 短所
  - 実用的に使えるのはせいぜい4変数
    (無理して6変数)まで

12

カルノー図による論理式の簡略化

- 隣接マスを併合することにより簡略化

Z \ $X\ Y$	0 0	0 1	1 1	1 0
0	1	1		
1				

13

クワイン・マクラスキ法

- Quine-McClusky法
  - 真理値表の併合・簡単化により簡略化

例 : $f(X,Y,Z) = X \cdot Y \cdot Z + X \cdot Y \cdot \overline{Z}$ の簡略化

$X\,Y\,Z$	f	最小項
1 1 1	1	
1 1 0	1	

Zを併合

$X\,Y\,Z$	f	積項
1 1 -	1	

Z は0でも1でもいい　⇒ Z はドントケアにできる

$$f(X,Y,Z) = X \cdot Y$$

14

QM法による行の併合例

例 : $f = X \cdot Y \cdot Z + X \cdot Y \cdot \overline{Z} + \overline{X} \cdot Y \cdot \overline{Z}$ の併合

$X\,Y\,Z$	最小項
1 1 1	
1 1 0	
0 1 0	

Zを併合
Xを併合

$X\,Y\,Z$	積項
1 1 -	
- 1 0	

$$f(X,Y,Z) = X \cdot Y + Y \cdot \overline{Z}$$

15

QM法による2段論理最小化

1. 最小項を併合して主項を決定する
   i. 最小項をグループ分けする
   ii. 隣接グループの項を併合する
   iii. 主項を決定する
2. 必要な主項を選択する
   i. 主項と最小項の対応表を作る
   ii. 特異最小項を決定する
   iii. 必須主項を決定する
   iv. 必須主項が包含する最小項を決定する
   v. 残る最小項を包含する主項を選択する

16

主項の決定(1) 最小項のグループ分け

1. 最小項のグループ分け
   i. 積和標準系にする
   ii. $f = 1$ となる項を取り出す
   iii. 1 の少ない項から順に並べる
   iv. 1の数でグループ分けする

例 : $f = \overline{A}\,\overline{B}\,C\,D + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$
$+ A\overline{B}\,C\,\overline{D} + A\overline{B}CD + A\,\overline{B}\,\overline{C}D$
$+ \overline{A}\,B\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,B\,\overline{C}D + A\,B\,C\,\overline{D}$

17

主項の決定(1) 最小項のグループ分け

$f = 1$ の行を取り出し
1の少ない順に並べる

$A\,B\,C\,D$	f
0 0 0 0	
0 0 0 1	**1**
0 0 1 0	
0 0 1 1	**1**
0 1 0 0	**1**
0 1 0 1	**1**
0 1 1 0	
0 1 1 1	

$A\,B\,C\,D$	f
1 0 0 0	**1**
1 0 0 1	**1**
1 0 1 0	**1**
1 0 1 1	**1**
1 1 0 0	
1 1 0 1	
1 1 1 0	**1**
1 1 1 1	

0 0 0 1
0 1 0 0
1 0 0 0
} 1が1個

0 0 1 1
0 1 0 1
1 0 0 1
1 0 1 0
} 1が2個

1 0 1 1
1 1 1 0
} 1が3個

18

主項の決定(1) 最小項のグループ分け

各最小項にラベルを付ける

1の数でグループ分け

	ラベル	$A_{(8)}$	$B_{(4)}$	$C_{(2)}$	$D_{(1)}$	主項
1が1個	$1 = 2^0$	0	0	0	1	
	$4 = 2^2$	0	1	0	0	
	$8 = 2^3$	1	0	0	0	
1が2個	$3 = 2^1+2^0$	0	0	1	1	
	$6 = 2^2+2^1$	0	1	1	0	
	$9 = 2^3+2^0$	1	0	0	1	
	$10 = 2^3+2^1$	1	0	1	0	
1が3個	$11 = 2^3+2^1+2^0$	1	0	1	1	
	$14 = 2^3+2^2+2^1$	1	1	1	0	

19

主項の決定(2) 項の併合

XYZ	最小項
1 1 1	
1 1 0	

XYに併合可能

- 併合可能な2行は1ビットのみ異なる
- 1の数でグループ分け
  ⇒併合可能な行は隣接グループに属する

各行が隣接グループの行と併合可能かチェックする

20

主項の決定(2) 項の併合

- 各行が隣接グループの行と併合可能かチェック

	ラベル	A	B	C	D	主項
1が1個	1	0	0	0	1	✓
	4	0	1	0	0	
	8	1	0	0	0	
1が2個	3	0	0	1	1	✓
	6	0	1	1	0	
	9	1	0	0	1	✓
	10	1	0	1	0	
1が3個	11	1	0	1	1	
	14	1	1	1	0	

0 0 - 1 (1と3)
- 0 0 1 (1と9)

1は3,9と併合可能

併合した行にはチェックを入れる

21

主項の決定(2) 項の併合

- 1が1個グループと2個のグループの間でチェック

	ラベル	A	B	C	D	主項
1が1個	1	0	0	0	1	✓
	4	0	1	0	0	✓
	8	1	0	0	0	✓
1が2個	3	0	0	1	1	✓
	6	0	1	1	0	✓
	9	1	0	0	1	✓
	10	1	0	1	0	✓
1が3個	11	1	0	1	1	
	14	1	1	1	0	

0 0 - 1
- 0 0 1
0 1 - 0
1 0 0 -
1 0 - 0

22

主項の決定(2) 項の併合

- 1が2個グループと3個のグループの間でチェック

	ラベル	A	B	C	D	主項
1が1個	1	0	0	0	1	✓
	4	0	1	0	0	✓
	8	1	0	0	0	✓
1が2個	3	0	0	1	1	✓
	6	0	1	1	0	✓
	9	1	0	0	1	✓
	10	1	0	1	0	✓
1が3個	11	1	0	1	1	✓
	14	1	1	1	0	✓

0 0 - 1, - 0 0 1,
0 1 - 1, 1 0 0 -
1 0 - 0

- 0 1 1
- 1 1 0
1 0 - 1
1 0 1 -
1 - 1 0

23

主項の決定(2) 項の併合

	ラベル	A B C D	主項
1が1個	1	0 0 0 1	✓
	4	0 1 0 0	✓
	8	1 0 0 0	✓
1が2個	3	0 0 1 1	✓
	6	0 1 1 0	✓
	9	1 0 0 1	✓
	10	1 0 1 0	✓
1が3個	11	1 0 1 1	✓
	14	1 1 1 0	✓

チェックが付いた行は主項ではない

	ラベル	A B C D	主項
1が1個	1,3	0 0 - 1	
	1,9	- 0 0 1	
	4,6	0 1 - 0	
	8,9	1 0 0 -	
	8,10	1 0 - 0	
1が2個	3,11	- 0 1 1	
	6,14	- 1 1 0	
	9,11	1 0 - 1	
	10,11	1 0 1 -	
	10,14	1 - 1 0	

24

主項の決定(2) 項の併合

	ラベル	$A\ B\ C\ D$	主項
1が1個	1,3	0 0 - 1	✓
	1,9	- 0 0 1	✓
	4,6	0 1 - 0	
	8,9	1 0 0 -	
	8,10	1 0 - 0	
1が2個	3,11	- 0 1 1	✓
	6,14	- 1 1 0	
	9,11	1 0 - 1	✓
	10,11	1 0 1 -	
	10,14	1 - 1 0	

1,3は9,11と併合可能

- 0 - 1
- 0 - 1
同じ項

1,9も3,11と併合可能

1,3,9,11 : - 0 - 1

25

主項の決定(2) 主項の決定

	ラベル	$A\ B\ C\ D$	主項
1が1個	1,3	0 0 - 1	✓
	1,9	- 0 0 1	✓
	4,6	0 1 - 0	p
	8,9	1 0 0 -	✓
	8,10	1 0 - 0	✓
1が2個	3,11	- 0 1 1	✓
	6,14	- 1 1 0	q
	9,11	1 0 - 1	✓
	10,11	1 0 1 -	✓
	10,14	1 - 1 0	r

ラベル	$A\ B\ C\ D$	主項
1,3,9,11	- 0 - 1	s
8,9,10,11	1 0 - -	t

最後までチェックが付かなければ主項

26

主項の決定(2) 主項の決定

主項	最小項	$A\ B\ C\ D$	論理式
p	4,6	0 1 - 0	
q	6,14	- 1 1 0	
r	10,14	1 - 1 0	
s	1,3,9,11	- 0 - 1	
t	8,9,10,11	1 0 - -	

27

主項の選択(1) 主項と最小項の対応表

- 横方向にチェック

主項が包含する最小項に○を付ける

主項 \ 最小項	1	3	4	6	8	9	10	11	14	必須
4,6:p			○	○						
6,14:q				○					○	
10,14:r							○		○	
1,3,9,11:s	○	○				○		○		
8,9,10,11:t					○	○	○	○		
選択										

28

主項の選択(1) 特異最小項

- 縦方向にチェック

特異最小項に◎を付ける

主項 \ 最小項	1	3	4	6	8	9	10	11	14	必須
4,6:p			◎	○						
6,14:q				○					○	
10,14:r							○		○	
1,3,9,11:s	◎	◎				○		○		
8,9,10,11:t					◎	○	○	○		
選択										

29

主項の選択(1) 必須主項

- 横方向にチェック

必須主項にチェックを付ける

主項 \ 最小項	1	3	4	6	8	9	10	11	14	必須
4,6:p			◎	○						✓
6,14:q				○					○	
10,14:r							○		○	
1,3,9,11:s	◎	◎				○		○		✓
8,9,10,11:t					◎	○	○	○		✓
選択										

30

主項の選択(1) 必須主項が包含する最小項

- 横方向→縦方向にチェック

必須主項が包含する最小項にチェックを付ける

主項 \ 最小項	1	3	4	6	8	9	10	11	14	必須
4,6:p			◎	○						✓
6,14:q				○					○	
10,14:r							○		○	
1,3,9,11:s	◎	◎				○		○		✓
8,9,10,11:t					◎	○	○	○		✓
選択	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		

31

主項の選択(1) 残る最小項を包含する主項

- 縦方向→横方向にチェック

残る最小項を包含する主項の中でなるべく大きい主項を選ぶ

主項 \ 最小項	1	3	4	6	8	9	10	11	14	必須
4,6:p			◎	○						✓
6,14:q				○					○	
10,14:r							○		○	
1,3,9,11:s	◎	◎				○		○		✓
8,9,10,11:t					◎	○	○	○		✓
選択	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		

どちらかを選ぶ

32

QM法による2段論理最小化

$f = ABCD + ABCD + ABCD$
$+ ABCD + ABCD + ABCD$
$+ ABCD + ABCD + ABCD$ の最小積和形

$f = ABD + BD + AB + BCD$

または

$f = ABD + BD + AB + ACD$

33

演習問題 : QM法による2段論理最小化

- 例題

A B C D	f
0 0 0 0	0
0 0 0 1	0
0 0 1 0	1
0 0 1 1	1
0 1 0 0	1
0 1 0 1	1
0 1 1 0	0
0 1 1 1	0

A B C D	f
1 0 0 0	0
1 0 0 1	0
1 0 1 0	1
1 0 1 1	1
1 1 0 0	0
1 1 0 1	1
1 1 1 0	0
1 1 1 1	1

34

	ラベル	$A_{(8)}$	$B_{(4)}$	$C_{(2)}$	$D_{(1)}$	主項
1が1個	$2 = 2^1$	0	0	1	0	
	$4 = 2^2$	0	1	0	0	
1が2個	$3 = 2^1+2^0$	0	0	1	1	
	$5 = 2^2+2^0$	0	1	0	1	
	$10 = 2^3+2^1$	1	0	1	0	
1が3個	$11 = 2^3+2^1+2^0$	1	0	1	1	
	$13 = 2^3+2^2+2^0$	1	1	0	1	
1が4個	$15 = 2^3+2^2+2^1+2^0$	1	1	1	1	

CD \ AB	00	01	11	10
00		4		
01		5	13	
11	3		15	11
10	2			10

最小項を
1の少ない順に並べ
グループ分けする

35

	ラベル	$ABCD$	主項
1個	2	0 0 1 0	✓
	4	0 1 0 0	✓
2個	3	0 0 1 1	✓
	5	0 1 0 1	✓
	10	1 0 1 0	✓
3個	11	1 0 1 1	✓
	13	1 1 0 1	✓
4個	15	1 1 1 1	✓

	ラベル	$ABCD$	主項
1個	2,3	0 0 1 -	
	2,10	- 0 1 0	
	4,5	0 1 0 -	
2個	3,11	- 0 1 1	
	5,13	- 1 0 1	
	10,11	1 0 1 -	
3個	11,15	1 - 1 1	
	13,15	1 1 - 1	

CD \ AB	00	01	11	10
00		4		
01		5	13	
11	3		15	11
10	2			10

各行それぞれが
隣接グループの行と
併合可能かチェック

36

	ラベル	$A\ B\ C\ D$	主項
1個	2,3	0 0 1 -	✓
	2,10	- 0 1 0	✓
	4,5	0 1 0 -	p
2個	3,11	- 0 1 1	✓
	5,13	- 1 0 1	q
	10,11	1 0 1 -	✓
3個	11,15	1 - 1 1	r
	13,15	1 1 - 1	s

ラベル	$A\ B\ C\ D$	主項
2,3,10,11	- 0 1 -	t

チェックが付かなかった
項が主項

$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00		4		
01		5	13	
11	3		15	11
10	2			10

各行それぞれが
隣接グループの行と
併合可能かチェック

37

主項	ラベル	$A\ B\ C\ D$
p	4,5	0 1 0 -
q	5,13	- 1 0 1
r	11,15	1 - 1 1
s	13,15	1 1 - 1
t	2,3,10,11	- 0 1 -

主項

$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00		4		
01		5	13	
11	3		15	11
10	2			10

38

主項 \ 最小項	2	3	4	5	10	11	13	15	必須
4,5:p			○	○					
5,13:q				○			○		
11,15:r						○		○	
13,15:s							○	○	
2,3,10,11:t	○	○			○	○			
選択									

$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00		4		
01		5	13	
11	3		15	11
10	2			10

主項と最小項の
対応表を作る

39

主項 \ 最小項	2	3	4	5	10	11	13	15	必須
4,5:p			◎	○					
5,13:q				○			○		
11,15:r						○		○	
13,15:s							○	○	
2,3,10,11:t	◎	◎			◎	○			
選択									

$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00		4		
01		5	13	
11	3		15	11
10	2			10

特異最小項を決定

40

主項 \ 最小項	2	3	4	5	10	11	13	15	必須
4,5:p			◎	○					✓
5,13:q				○			○		
11,15:r						○		○	
13,15:s							○	○	
2,3,10,11:t	◎	◎			◎	○			✓
選択									

$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00		4		
01		5	13	
11	3		15	11
10	2			10

必須主項を決定

41

主項 \ 最小項	2	3	4	5	10	11	13	15	必須
4,5:p			◎	○					✓
5,13:q				○			○		
11,15:r						○		○	
13,15:s							○	○	
2,3,10,11:t	◎	◎			◎	○			✓
選択	✓	✓	✓	✓	✓	✓			

$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00		4		
01		5	13	
11	3		15	11
10	2			10

必須主項が包含する
最小項を決定

42

主項 \ 最小項	2	3	4	5	10	11	13	15	必須
4,5:p			◎	○					✓
5,13:q				○			○		$q+r$
11,15:r						○		○	または
13,15:s							○	○	s
2,3,10,11:t	◎	◎			◎	○			✓
選択	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	

CD \ AB	00	01	11	10
00		4		
01		5	13	
11	3		15	11
10	2			10

残る最小項(13,15)を包含する主項を選択

q と r または s

⇩

s を選ぶのが最小

例題 : QM法による2段論理最小化

- 例題

$f = ABC + BCD + ACD + ABC + BCD$

最小積和形は

$f = ABC + BC + ABD$

クワイン・マクラスキ法の特徴

- 長所
  - 数値化が簡単であり計算機処理に向く
  - 多変数論理関数にも適用可能
- 短所
  - 手順が面倒 (特に主項の選択操作)
  - 直感性で劣る

問題: QM法による最小化

- 次の真理値表の最小積和形を求めよ

$A\ B\ C\ D$	f
0 0 0 0	1
0 0 0 1	1
0 0 1 0	1
0 0 1 1	1
0 1 0 0	0
0 1 0 1	0
0 1 1 0	0
0 1 1 1	0

$A\ B\ C\ D$	f
1 0 0 0	1
1 0 0 1	1
1 0 1 0	1
1 0 1 1	0
1 1 0 0	0
1 1 0 1	1
1 1 1 0	0
1 1 1 1	0