論理回路

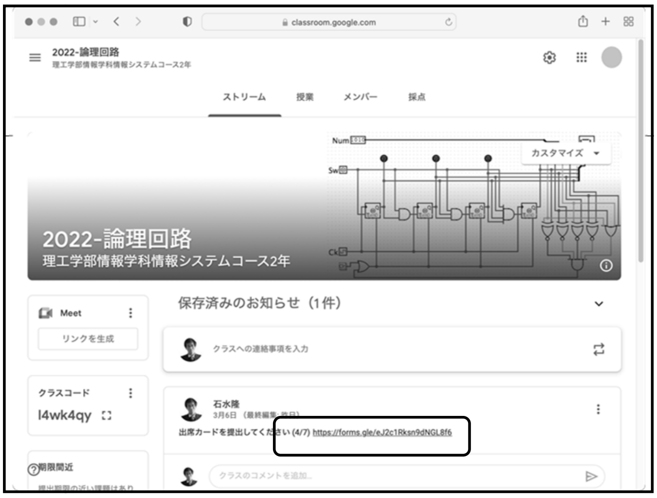
第2回 論理ゲートを用いる
　　論理関数の実現

http://www.info.kindai.ac.jp/LC

E館3階E-331 内線5459
takasi-i@info.kindai.ac.jp

1

2



3

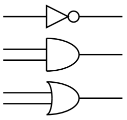
4

5

6

論理ゲート

- 論理ゲート
  - ハードウェアによる論理演算機構
- 基本論理ゲート
  - NOTゲート
  - ANDゲート
  - ORゲート



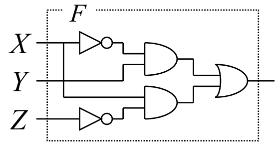
7

論理演算と論理ゲート

論理変数 → 論理演算 → 演算結果

入力信号（直流電圧） → 論理ゲート → 出力信号（直流電圧）

$$f(X, Y, Z) = \overline{X}\cdot Y + X\cdot \overline{Z}$$

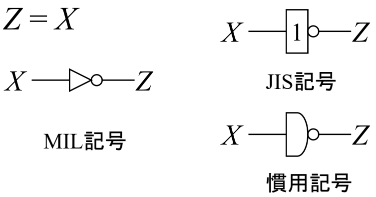


8

NOTゲート

◆ 定義 NOTゲート
- 入力信号を反転して出力する論理ゲート
  - 1入力1出力

$$Z = \overline{X}$$

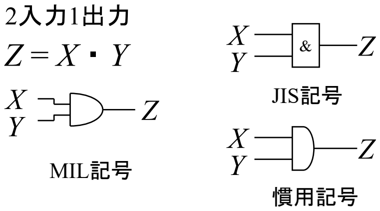


9

ANDゲート

◆ 定義 ANDゲート
- 入力信号が全て 1 のときは 1 を、それ以外は 0 を出力する論理ゲート
  - 2入力1出力

$$Z = X\cdot Y$$

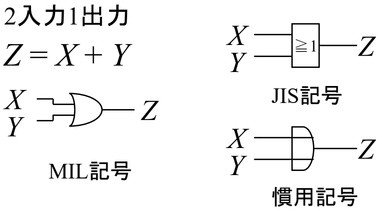


10

ORゲート

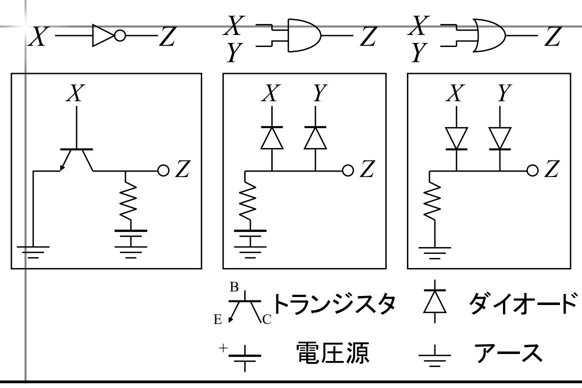
◆ 定義 ORゲート
- 入力信号に 1 つでも 1 があれば 1 を、それ以外は0を出力する論理ゲート
  - 2入力1出力

$$Z = X + Y$$



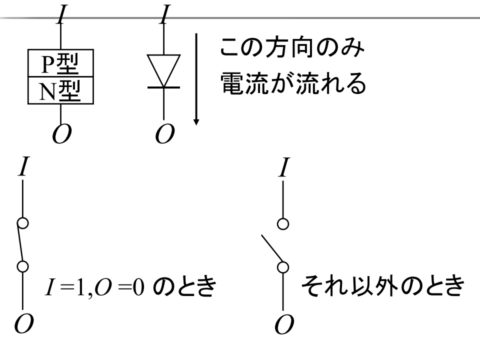
11

NOT, AND, ORゲートの回路



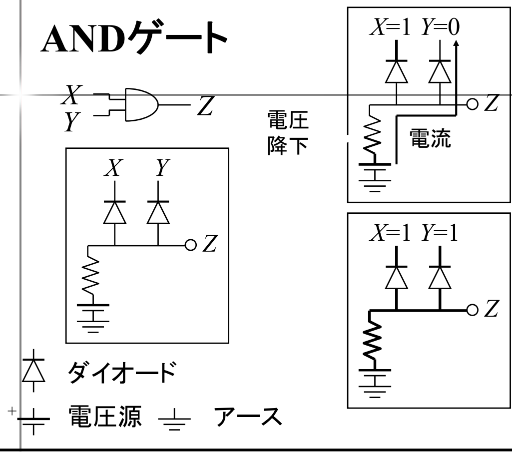
12

ダイオードの性質



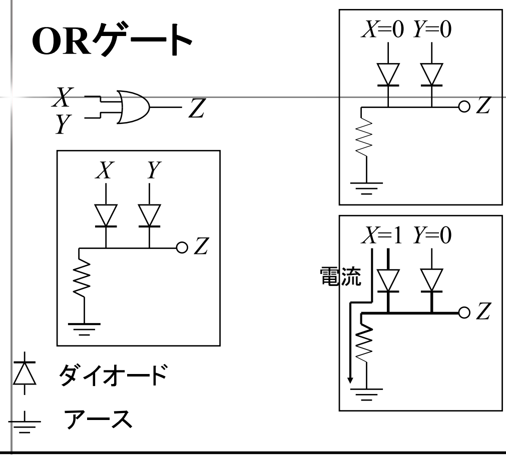
13

ANDゲート



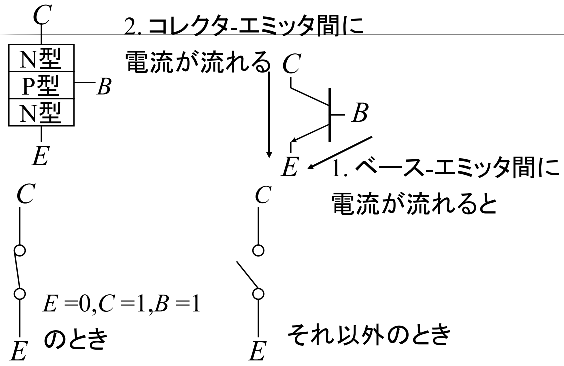
14

ORゲート



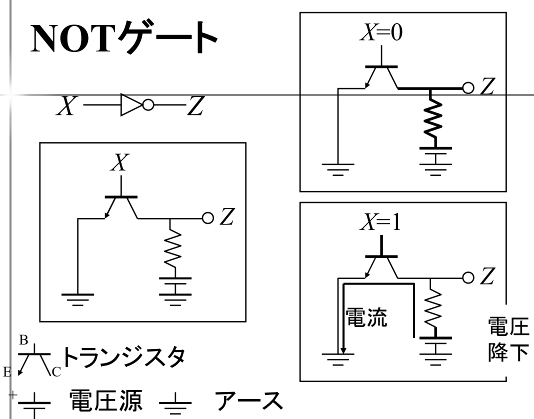
15

トランジスタの性質



16

NOTゲート



17

組み合わせ回路

- 定義 組み合わせ回路
  - ある時刻の出力信号が、現在の入力信号だけで決まる回路
- 定義 順序回路
  - ある時刻の出力信号が、現在の入力信号だけでなく、過去の入力信号の影響も受ける回路 (回路内にバッファ・メモリがある)

18

組み合わせ回路と論理関数

- 論理関数 $f(I_1, I_2, \ldots, I_m) = O$
  - I_i : 入力
  - O : 出力

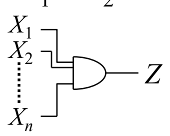
●論理関数
- ➢回路における入力と出力との論理関係を示す
- ➢回路の機能を論理式で表す

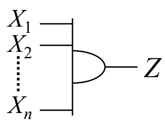
19

n入力ANDゲート

◆ 定義 n入力ANDゲート
- 入力信号が全て 1 のときは 1 を、
  それ以外は 0 を出力する論理ゲート
  - n入力1出力

$$Z = X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n$$



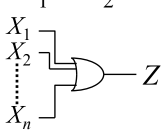


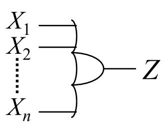
20

n入力ORゲート

◆ 定義 n入力ORゲート
- 入力信号に 1 つでも 1 があれば 1 を、
  それ以外は 0 を出力する論理ゲート
  - n入力1出力

$$Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$





21

排他的論理和 EXOR

◆ 定義 排他的論理和 EXOR
- 入力のうち 1 が 1 つ(だけ)あるときは 1 、
  それ以外は 0 を与える演算

演算記号 :⊕

$$Z = X \oplus Y$$
$$= X \cdot \overline{Y} + \overline{X} \cdot Y$$

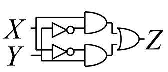
X Y	$X \oplus Y$
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	0

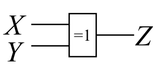
22

EXORゲート

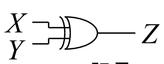
◆ 定義 EXORゲート
- 入力信号に 1 が 1 つ(だけ)あれば1を、
  それ以外は0を出力する論理ゲート
  - 2入力1出力

$$Z = X \oplus Y = X \cdot \overline{Y} + \overline{X} \cdot Y$$

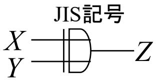




JIS記号



MIL記号



慣用記号

23

EXORと結合則

◆ 定理 EXORと結合則
- EXORは結合則を満たす

$$(X \oplus Y) \oplus Z = X \oplus (Y \oplus Z)$$

X Y Z	$X \oplus Y \oplus Z$
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	0

X Y Z	$X \oplus Y \oplus Z$
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	0
1 1 1	1

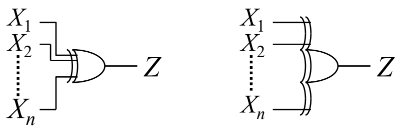
入力
1が奇数個
⇒出力1
1が偶数個
⇒出力0

24

n入力EXORゲート

◆ 定義 n入力EXORゲート
- 入力信号に 1 が奇数個あれば 1 を、
  それ以外は0を出力する論理ゲート
  - n入力1出力

$$Z = X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_n$$



25

否定論理積 NAND

◆ 定義 否定論理積 NAND
- 入力のANDを取り、その結果にNOTを施す演算

演算記号 |

$$Z = X|Y = \overline{X \cdot Y}$$

$X\ Y$	$X\|Y$
0 0	1
0 1	1
1 0	1
1 1	0

※記号 | を使うことはほとんど無い

26

NANDと結合則

◆ 定理 NANDと結合則
- NANDは結合則を満たさない

$$(X|Y)|Z \neq X|(Y|Z)$$

(証明)

$$(X|Y)|Z = \overline{\overline{X \cdot Y} \cdot Z} = X \cdot Y + \overline{Z}$$
$$X|(Y|Z) = \overline{X \cdot \overline{Y \cdot Z}} = \overline{X} + Y \cdot Z$$

27

(別解) 真理値表より題意が示される

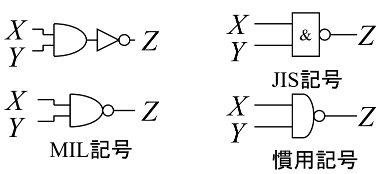
$X\ Y\ Z$	$(X\|Y)\|Z$	$X\|(Y\|Z)$
0 0 0	$1\|0 = 1$	$0\|1 = 1$
0 0 1	$1\|1 = 0$	$0\|1 = 1$
0 1 0	$1\|0 = 1$	$0\|1 = 1$
0 1 1	$1\|1 = 0$	$0\|0 = 1$
1 0 0	$1\|0 = 1$	$1\|1 = 0$
1 0 1	$1\|1 = 0$	$1\|1 = 0$
1 1 0	$0\|1 = 1$	$1\|1 = 0$
1 1 1	$0\|1 = 1$	$1\|0 = 1$

28

NANDゲート

◆ 定義 NANDゲート
- AND,NOTゲートを直列に繋いだ論理ゲート
  - 2入力1出力

$$Z = X|Y = \overline{X \cdot Y}$$

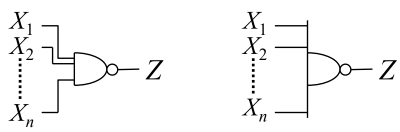


29

n入力NANDゲート

◆ 定義 n入力NANDゲート
- 入力信号が全て 1 のときは 0 を、
  それ以外は 1 を出力する論理ゲート
  - n入力1出力

$$Z = \overline{X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n} \neq X_1 | X_2 |\ldots| X_n$$



30

否定論理和 NOR

- ◆ 定義 否定論理積 NOR
  - – 入力のORを取り、その結果にNOTを施す演算

演算記号 ↓

$$Z = X \downarrow Y = \overline{X + Y}$$

$X\ Y$	$X{\downarrow}Y$
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	0

31

NORと結合則

- ◆ 定理 NORと結合則
  - – NORは結合則を満たさない

$$(X \downarrow Y) \downarrow Z \neq X \downarrow (Y \downarrow Z)$$

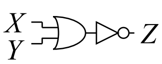
(証明) NANDと結合則の証明と同様

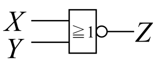
32

NORゲート

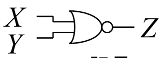
- ◆ 定義 NORゲート
  - – OR,NOTゲートを直列に繋いだ論理ゲート
    - • 2入力1出力

$$Z = X \downarrow Y = \overline{X + Y}$$

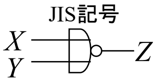




JIS記号



MIL記号



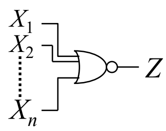
慣用記号

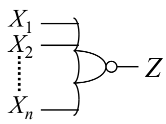
33

*n*入力NORゲート

- ◆ 定義 n入力NORゲート
  - – 入力信号に 1 つでも 1 があれば 0 を、それ以外は 1 を出力する論理ゲート
    - • n入力1出力

$$Z = \overline{X_1 + X_2 + \ldots + X_n} \neq X_1 \downarrow X_2 \downarrow \ldots \downarrow X_n$$





34

論理関数

NOT

X	$\overline{X}$
0	1
1	0

AND

X	Y	$X \cdot Y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

OR

X	Y	$X + Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

EXOR

X	Y	$X \oplus Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NAND

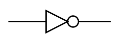
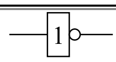
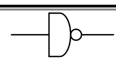
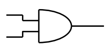
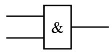
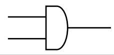
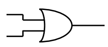
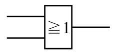
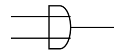
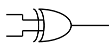
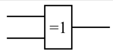
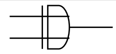
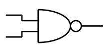
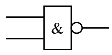
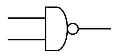
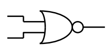
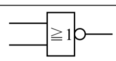
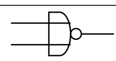
X	Y	$\overline{X \cdot Y}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NOR

X	Y	$\overline{X + Y}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

35

論理ゲート

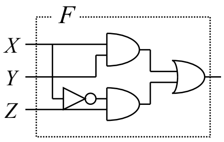
	MIL記号	JIS記号	慣用記号
NOT			
AND			
OR			
EXOR			
NAND			
NOR			

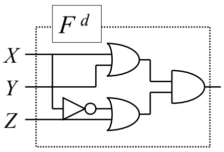
36

双対回路

- 定義 双対回路
  - 論理関数 f に対応する論理回路を F とする このとき、f の双対関数 f^d に対応する論理回路 F^d を F の双対な論理回路と言う

例: $f = X \cdot Y + \overline{X} \cdot Z,\ f^d = (X + Y) \cdot (\overline{X} + Z)$





37

万能論理関数集合

- 定義 万能論理関数集合
  - 任意の論理関数が表現できる論理関数の集合

➢あらゆる論理関数は、AND,OR,NOTの組み合わせで表現可能

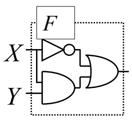
- U_0 = {AND,OR,NOT}は万能論理関数集合

38

AND/OR形式, AND/OR回路

- 定義 AND/OR形式
  - U_0={AND,OR,NOT}によって表された論理式
- 定義 AND/OR回路
  - AND,OR,NOTの3種類のゲートだけで構成する論理回路

$f(X, Y) = X \cdot Y + \overline{X}$



疑問: AND,OR,NOT全て必要か？

39

AND⇔OR変換

➢ $X + Y = \overline{\overline{X} \cdot \overline{Y}}$ (ド・モルガン則)

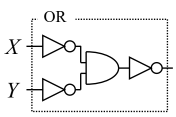
⇒論理関数はANDとNOTのみで表現可能

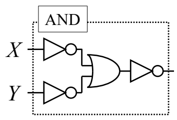
- U_1 = {AND,NOT}は万能論理関数集合

➢ $X \cdot Y = \overline{\overline{X} + \overline{Y}}$

⇒論理関数はORとNOTのみで表現可能

- U_2 = {OR,NOT}は万能論理関数集合



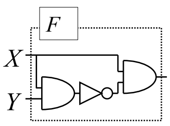


40

NOT-AND形式, AND回路

- 定義 NOT-AND形式,AND形式
  - U_1 = {AND,NOT}によって表された論理式
- 定義 NOT-AND回路, AND回路
  - AND,NOT の2種類のゲートだけで構成する論理回路

$f(X, Y) = \overline{(X \cdot Y)} \cdot X$

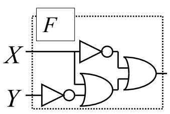


41

NOT-OR形式, OR回路

- 定義 NOT-OR形式,OR形式
  - U_2 = {OR,NOT}によって表された論理式
- 定義 NOT-OR回路, OR回路
  - OR,NOT の2種類のゲートだけで構成する論理回路

$f(X, Y) = (X + \overline{Y}) + \overline{X}$



42

万能論理関数集合

以下の集合は万能論理関数集合

- U_0 ={AND, OR, NOT}
- U_1 ={OR, NOT}
- U_2 ={AND, NOT}
- U_3 ={NAND}
- U_4 ={NOR}

43

NANDの万能性

◆ 定理 NANDの万能性
– 任意の論理関数はNANDだけで表せる

(証明) NAND $\overline{X \cdot Y}$ を $X \mid Y$ と表す

NOT : $\overline{X} = \overline{X} + \overline{X} = \overline{X \cdot X} = X \mid X$

OR : $X + Y = \overline{\overline{X + Y}} = \overline{\overline{X} \cdot \overline{Y}}$

$= \overline{X} \mid \overline{Y} = (X \mid X) \mid (Y \mid Y)$

AND : $X \cdot Y = \overline{\overline{X \cdot Y}} = \overline{X \mid Y}$

$= (X \mid Y) \mid (X \mid Y)$

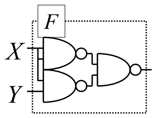
44

NAND形式,NAND回路

◆ 定義 NAND形式
– U_3 = {NAND}によって表された論理式

◆ 定義 NAND回路
– NANDゲートだけで構成する論理回路

$f(X,Y) = (X|Y)|(X|X)$



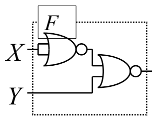
45

NOR形式,NOR回路

◆ 定義 NOR形式
– U_4 = {NOR}によって表された論理式

◆ 定義 NOR回路
– NORゲートだけで構成する論理回路

$f(X,Y) = (X \downarrow X) \downarrow Y$



46

各形式の例

例：$f(X,Y) = X \oplus Y$

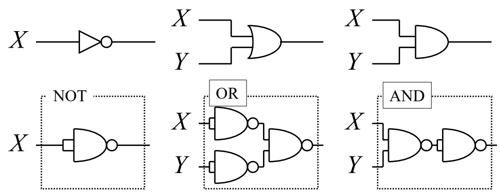
$X\ Y$	$f(X,Y)$
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	0

AND/OR形式	$X \cdot \overline{Y} + \overline{X} \cdot Y,\ (X + Y) \cdot (\overline{X} + \overline{Y})$
NOT-AND形式 (AND形式)	$\overline{\overline{X} \cdot \overline{Y}} \cdot \overline{X \cdot Y}$
NOT-OR形式 (OR形式)	$\overline{X + \overline{Y}} + \overline{\overline{X} + Y}$
NAND形式	$(X \mid (Y \mid Y)) \mid (X \mid X) \mid Y)$
NOR形式	$((X \downarrow X) \downarrow (Y \downarrow Y)) \downarrow (X \downarrow Y)$

47

基本ゲートのNAND表現

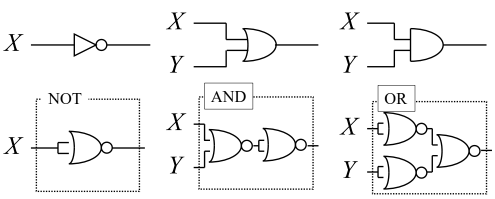
- $\overline{X} = X \mid X$
- $X + Y = (X \mid X) \mid (Y \mid Y)$
- $X \cdot Y = (X \mid Y) \mid (X \mid Y)$



48

基本ゲートのNOR表現

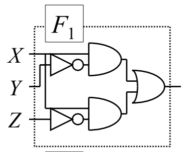
- $\overline{X} = X \downarrow X$
- $X + Y = (X \downarrow Y) \downarrow (X \downarrow Y)$
- $X \cdot Y = (X \downarrow X) \downarrow (Y \downarrow Y)$

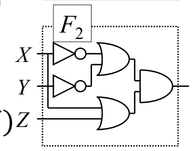


49

AND-OR回路,OR-AND回路

- AND-OR回路
  - 積和形関数に対応する回路
    - ✓ NOT→AND→OR
- OR-AND回路
  - 和積形関数に対応する回路
    - ✓ NOT→OR→AND





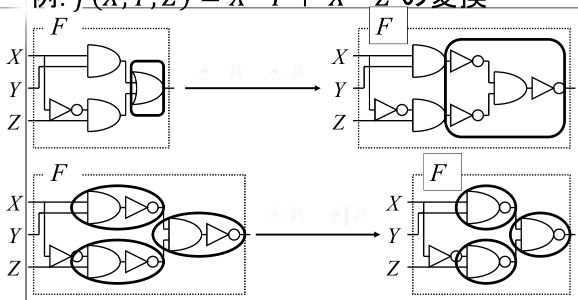
$f_1(X, Y, Z) = X \cdot \overline{Y} + X \cdot \overline{Z}$

$f_2(X, Y, Z) = (\overline{X} + \overline{Y}) \cdot (X + Z)$

50

AND-OR回路→ NAND回路変換

例: $f(X, Y, Z) = X \cdot Y + \overline{X} \cdot Z$ の変換

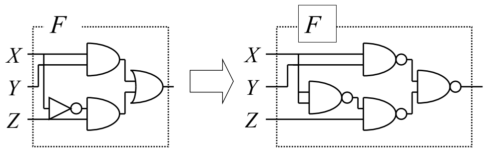


AND-OR回路→NAND回路変換はゲートの入れ替えだけ

51

AND-OR回路→ NAND回路変換

例: $f(X, Y, Z) = X \cdot Y + \overline{X} \cdot Z$ の変換



全てのゲートをNANDゲートにするだけ

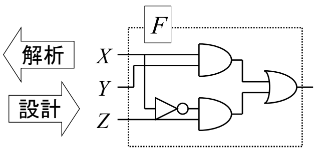
OR-AND回路→NOR回路変換も同様

52

論理回路の解析・設計

- 定義 論理回路の解析
  - 論理回路⇒論理関数 変換
- 定義 論理回路の設計
  - 論理関数⇒論理回路 変換

$f(X, Y, X)$
$= X \cdot Y + \overline{X} \cdot Z$



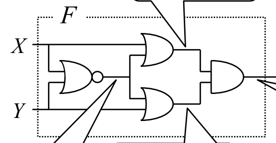
53

論理回路の解析

- 例題 : 次の論理回路Fを解析せよ

$X + \overline{X} \cdot \overline{Y}$
$= X + \overline{Y}$

左(入力端子)から順に
各素子の出力関数を
求めていく



$(X + \overline{Y}) \cdot (\overline{X} + Y)$
$= \overline{X} \cdot \overline{Y} + X \cdot Y$

$\overline{X + Y}$
$= \overline{X} \cdot \overline{Y}$

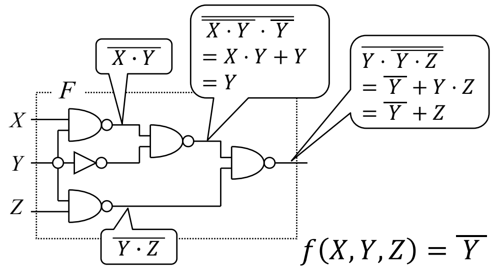
$Y + \overline{X} \cdot \overline{Y}$
$= \overline{X} + Y$

$f(X, Y) = \overline{X} \cdot \overline{Y} + X \cdot Y$

54

論理回路の解析

- 例題: 次の論理回路Fを解析せよ



$f(X, Y, Z) = \overline{Y} + Z$

課題テスト

- 毎週 GoogleClassroom上で課題テストを行う
  - 授業後〜翌週の授業開始まで
- GoogleClassroomで
  論理回路
  ⇒授業
  ⇒その回の課題
  と辿る

演習問題: EXORと結合則

◆ 定理 : EXORと結合則

- EXORは結合則を満たす

$(X \oplus Y) \oplus Z = X \oplus (Y \oplus Z)$

- 定理を確かめよ

$$(X \oplus Y) \oplus Z = \overline{(\overline{X} \cdot Y + X \cdot \overline{Y})} \cdot Z + (\overline{X} \cdot Y + X \cdot \overline{Y}) \cdot \overline{Z}$$
$$= (\overline{\overline{X} \cdot Y} \cdot \overline{X \cdot \overline{Y}}) \cdot Z + (\overline{X} \cdot Y + X \cdot \overline{Y}) \cdot \overline{Z}$$
$$= ((X + \overline{Y}) \cdot (\overline{X} + Y)) \cdot Z + (\overline{X} \cdot Y + X \cdot \overline{Y}) \cdot \overline{Z}$$
$$= (\overline{X} \cdot \overline{Y} + X \cdot Y) \cdot Z + (\overline{X} \cdot Y + X \cdot \overline{Y}) \cdot \overline{Z}$$
$$= \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot Z + X \cdot Y \cdot Z + \overline{X} \cdot Y \cdot \overline{Z} + X \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z}$$

$$X \oplus (Y \oplus Z) = \overline{X} \cdot (\overline{Y} \cdot Z + Y \cdot \overline{Z}) + X \cdot \overline{(\overline{Y} \cdot Z + Y \cdot \overline{Z})}$$
$$= \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot Z + \overline{X} \cdot Y \cdot \overline{Z} + X \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z} + X \cdot Y \cdot Z$$

$X\ Y\ Z$	$(X \oplus Y) \oplus Z$	$X \oplus (Y \oplus Z)$
0 0 0	$0 \oplus 0 = 0$	$0 \oplus 0 = 0$
0 0 1	$0 \oplus 1 = 1$	$0 \oplus 1 = 1$
0 1 0	$1 \oplus 0 = 1$	$0 \oplus 1 = 1$
0 1 1	$1 \oplus 1 = 0$	$0 \oplus 0 = 0$
1 0 0	$1 \oplus 0 = 1$	$1 \oplus 0 = 1$
1 0 1	$1 \oplus 1 = 0$	$1 \oplus 1 = 0$
1 1 0	$0 \oplus 0 = 0$	$1 \oplus 1 = 0$
1 1 1	$0 \oplus 1 = 1$	$1 \oplus 0 = 1$

演習問題: NORと結合則

◆ 定理 : NORと結合則

- NORは結合則を満たさない

$(X \downarrow Y) \downarrow Z \neq X \downarrow (Y \downarrow Z)$

- 定理を確かめよ

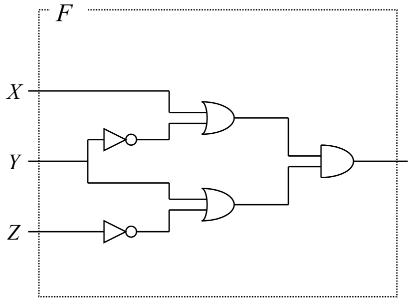
$$(X \downarrow Y) \downarrow Z = \overline{\overline{(X + Y)} + Z}$$
$$= (X + Y) \cdot \overline{Z}$$ (ド・モルガン則)
$$= X \cdot \overline{Z} + Y \cdot \overline{Z}$$ (分配則)

$$X \downarrow (Y \downarrow Z) = \overline{X + \overline{(Y + Z)}}$$
$$= \overline{X} \cdot (Y + Z)$$
$$= \overline{X} \cdot Y + \overline{X} \cdot Z$$

$X\ Y\ Z$	$(X \downarrow Y) \downarrow Z$	$X \downarrow (Y \downarrow Z)$
0 0 0	$1 \downarrow 0 = 0$	$0 \downarrow 1 = 0$
0 0 1	$1 \downarrow 1 = 0$	$0 \downarrow 0 = 1$
0 1 0	$0 \downarrow 0 = 1$	$0 \downarrow 0 = 1$
0 1 1	$0 \downarrow 1 = 0$	$0 \downarrow 0 = 1$
1 0 0	$0 \downarrow 0 = 1$	$1 \downarrow 1 = 0$
1 0 1	$0 \downarrow 1 = 0$	$1 \downarrow 0 = 0$
1 1 0	$0 \downarrow 0 = 1$	$1 \downarrow 0 = 0$
1 1 1	$0 \downarrow 1 = 0$	$1 \downarrow 0 = 0$

演習問題: 論理回路の設計

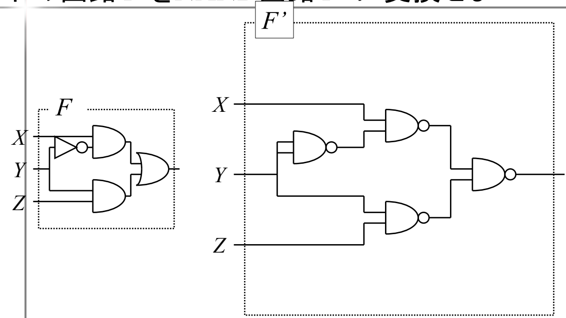
論理関数 f に対応する論理回路 F を設計せよ



61

演習問題: NAND回路

下の回路 F をNAND回路 F' に変換せよ



AND-OR回路→NAND回路変換はゲートの入れ替えだけ

62

参考資料: カルノー図

- カルノー図:関数値を2次元格子図で表現
  - 論理関数を直感的に把握する表現法
  - 論理回路の最適化設計を直感的に行える
- カルノー図のサイズ
  - 2変数(2^2通り) : $2^1\times 2^1 = 2\times 2$: 縦2横2
  - 3変数(2^3通り) : $2^2\times 2^1 = 4\times 2$: 縦4横2
  - 4変数(2^4通り) : $2^2\times 2^2 = 4\times 4$: 縦4横4

63

参考資料: カルノー図の例

例題：$f(X,Y,Z) = \bar{X}\cdot\bar{Y} + Y\cdot\bar{Z}$ を
カルノー図で示せ

順番に注意！

Z \ X Y	0 0	0 1	1 1	1 0
0	1	1	1	0
1	1	0	0	0

64

参考資料: カルノー図の座標ラベル

- 隣同士で1文字だけが異なるようにする
  - 2変数のラベル
    - 00, 01, 11, 10 (, 00)
  - 3変数のラベル
    - 000, 001, 011, 010, 110,
      111, 101, 100 (, 000)
  - 4変数のラベル
    - 0000,0001,0011,0010,0110,0111,0101,0100,
      1100,1101,1111,1110,1010,1011,1001,1000

65

参考資料: カルノー図の例題

例題 次のカルノー図の論理関数を求めよ

Y \ X	0	1
0	0	1
1	1	0

(0,1)(1,0)の
マス目が1

66

参考資料: カルノー図による論理式の簡略化

- カルノー図の隣同士は1文字だけが異なる

Z \ XY	00	01	11	10
0	1	1		
1				

Y は 0 でも 1 でも値は同じ

$\Rightarrow$ Y は式から消してよい

この2マスは共に $X = 0, Z = 0$

67

参考資料: カルノー図による論理式の簡略化

Z \ XY	00	01	11	10
0		1	1	
1		1	1	

この4マスは全て $Y = 1$

68

参考資料: カルノー図による論理式の簡略化

Z \ XY	00	01	11	10
0	1			1
1	1			1

69

参考資料: カルノー図による論理式の簡略化

ZW \ XY	00	01	11	10
00	1			1
01	1			1
11			1	
10	1	1	1	1

$2^i \times 2^i$ の長方形内が全て1ならば簡略化可能

✓カルノー図の上下・左右は繋がっていることに注意

70