論理回路

第1回 論理回路の数学的基本

ー ブール代数

http://www.info.kindai.ac.jp/LC

E館3階E-331 内線5459

takasi-i@info.kindai.ac.jp

1

本科目の内容

- 電子計算機(computer)の構成
  - ソフトウェア
    - 複数のプログラムの組み合わせ
      - オペレーティングシステム・アプリケーション等
  - ハードウェア
    - 複数の回路(circuit)の組み合わせ
      - メモリ・演算回路・制御回路等
- 本科目で学ぶこと
  - 論理回路の働きとその設計手法

2

成績について

評価基準	
各週課題	30%
定期試験	70%

- 無届欠席禁止
  - やむを得ず欠席した場合は翌週までに連絡すること
  - 無届欠席が複数回ある場合は試験の点数に関わりなく不受となる

オンライン授業では GoogleClassroom から出席カードが提出されれば出席とします

3

昨年度の受講状況

学年	コース	受講者数	合格	不可	不受	合格率
2	システム	90	77	9	4	88%
3	システム	2	1	0	1	100%
3	メディア	3	3	0	0	100%
4	システム	2	2	0	0	100%
4	メディア	3	0	3	0	0%

※全出席し、全レポートを〆切までに提出して不可になった受講生はいない

4

5

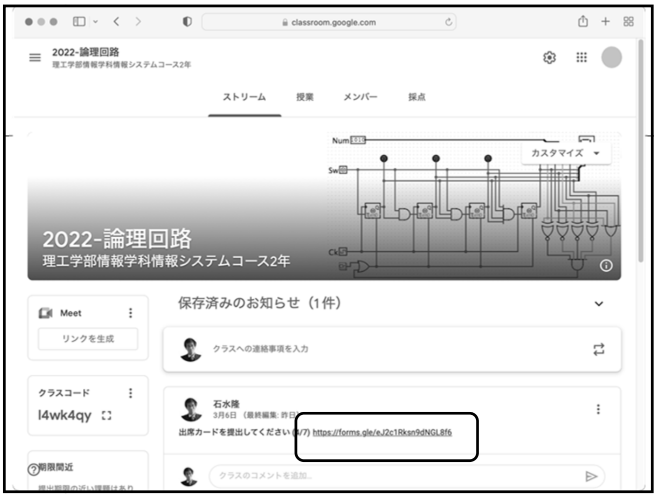
6


classroom.google.com
クラスに参加
参加
現在、次のメールアドレスでログインしています
[redacted]kindai.ac.jp
アカウントを切り替える
クラスコード
教師にクラスコードを聞いてこちらに入力してください。
クラスコード
クラスコードを使用してログインするには
• 承認済みアカウントを使用します
• 5〜7 個の文字と数字で構成され、スペースや記号を含まないクラスコードを
論理回路　l4wk4qy

7


classroom.google.com
Google Classroom
ToDo
チェックが必要な課題
カレンダー
2022-論理回路
2022-情報システムプ...
2022-コンパイラ
2022-基礎線形代数学1
情報学部情報学科1年

8


classroom.google.com
2022-論理回路
理工学部情報学科情報システムコース2年
ストリーム
授業
メンバー
採点
カスタマイズ
2022-論理回路
理工学部情報学科情報システムコース2年
Meet
リンクを生成
保存済みのお知らせ（1件）
クラスへの連絡事項を入力
クラスコード
l4wk4qy
石水隆
出席カードを提出してください (4/7) https://forms.gle/eJ2c1Rksn9dNGL8f6
期限間近
クラスのコメントを追加...

9


docs.google.com
出席カード (論理回路) 第1回 (4/7)
[redacted]kindai.ac.jp アカウントを切り替える
このフォームを送信すると、メールアドレスが記録されます
*必須
あなたの氏名を入力してください。 *
回答を入力
あなたの学籍番号を入力してください。(例：2110370999) 省略形は使用しないでください。 *
回答を入力
送信
フォームをクリア
Google フォームでパスワードを送信しないでください。
Google フォーム

10

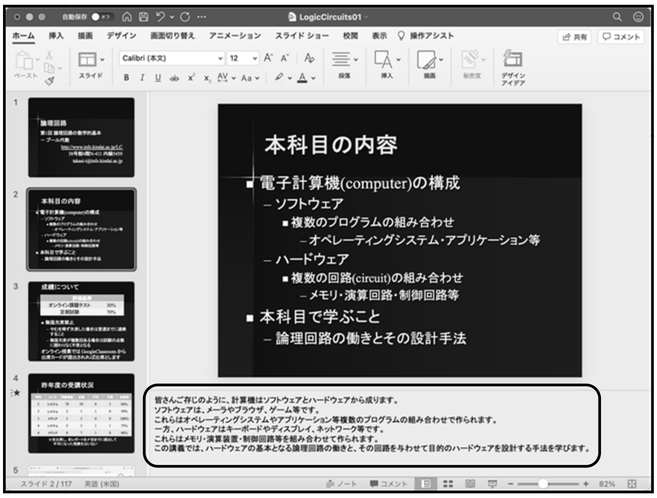

info.kindai.ac.jp
◆論理回路◆
https://www.info.kindai.ac.jp/LC/
連絡
• Logisim実習について
• 出席について
単位取得には原則として全ての授業に出席する必要があります。 やむを得ず欠席する場合はその翌週までに必ず欠席届を出してください。 欠席届無しの欠席が複数回ある場合は履修の意思無しと見做して不受扱いにします。
オンライン授業では、当日 GoogleClassrooom から出席カードが提出がされていれば出席扱いにします。
• 課題について

11


info.kindai.ac.jp
https://www.info.kindai.ac.jp/LC/
講義資料
• 第1回：論理回路の基本 (4/7) パワーポイント PDF ノート用PDF (4/1 update)
• 第2回：論理ゲート (4/14) パワーポイント PDF ノート用PDF (4/1 update)
• 第3回：カルノー図 (4/21) パワーポイント PDF ノート用PDF (4/1 update)
• 第4回 Logisim実習(1) (4/28) パワーポイント PDF ノート用PDF (4/1 update)
課題テスト
補足資料
• 代表的な論理関数・論理ゲート一覧
• フリップフロップの特性表
オフィスアワー

12

13



14

論理と情報

- 我々の周囲には様々な情報がある
  - 様々な情報の形態
    - 文字・信号・音声・図形・画像・映像…
- 情報の整理・分析が必要
  - 情報の整理・分析を簡単にするには…？

論理(logic)を用いる

論理 : 1(真) か 0(偽) かの2値で表される

15

論理と情報

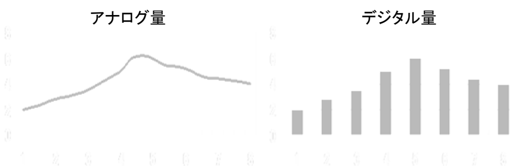
- 何故論理が必要？
  - 世の中には論理で表現される物事が多い
- 論理を使えば
  - 物事の曖昧性が無くなりはっきりする
  - 簡単に処理できる
- 論理を計算機で扱うには…？

ブール代数を用いる

16

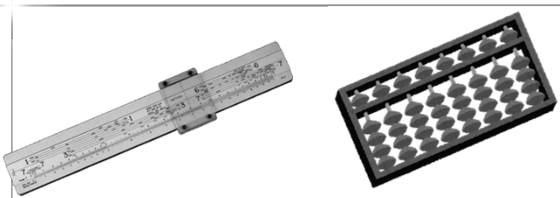
情報の種類 アナログとデジタル

- アナログ情報 : 連続的な値
  - 時間・電圧・気温・質量・大きさ…
- デジタル情報 : 離散的な値
  - 連続的な値を一定周期毎の有限桁の数値で表現



17

アナログとデジタル



計算尺 / 算盤

「長さ」で数値を表す / 「珠が上か下か」で数値を表す

アナログ / デジタル

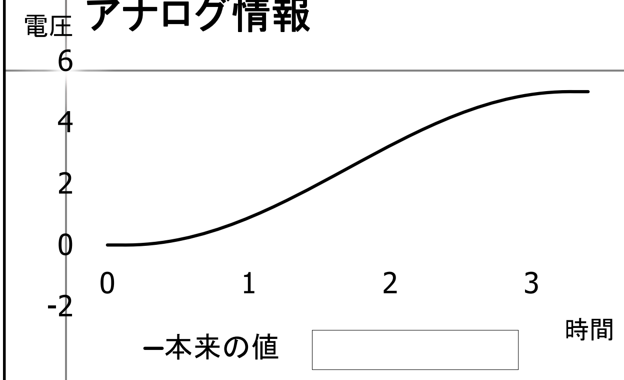
18

アナログ情報とデジタル情報

- アナログ情報
  - 連続的な値
  - 0 を 0V、1000 を 10V で表す
  - 234　⇒ 2.34V
- デジタル情報
  - 値は 0 と 1 のみ
  - 0 を 0V、1 を 5V で表す
  - 234　⇒ 2進数に直して 11101010
    ⇒ 5V, 5V, 5V, 0V, 5V, 0V, 5V, 0V

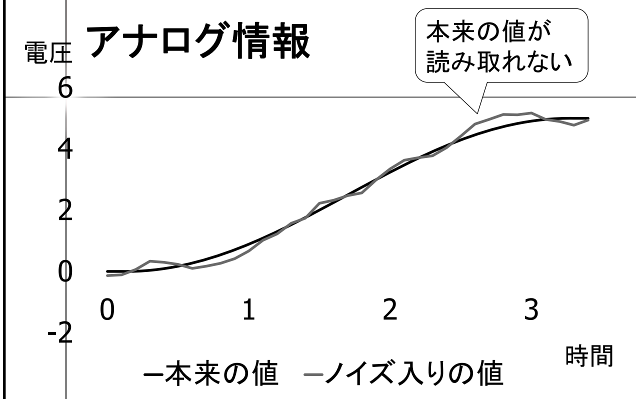
19

アナログ情報



20

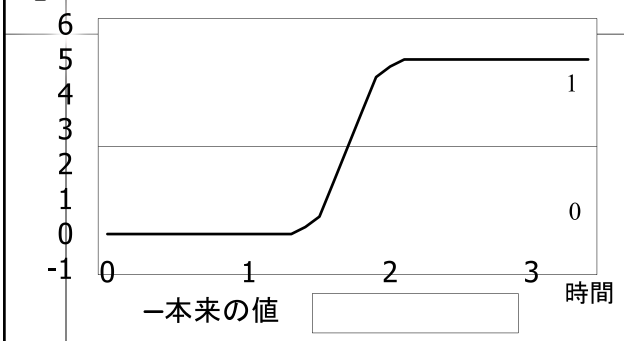
アナログ情報



アナログ情報はノイズに弱い

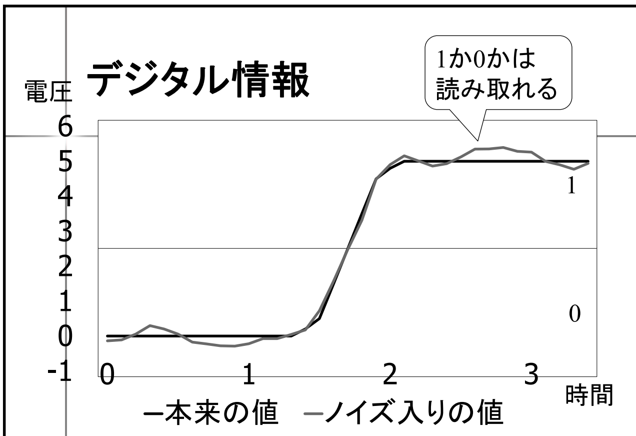
21

デジタル情報



22

デジタル情報



デジタル情報はノイズに強い

23

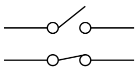
計算機 アナログ計算機とデジタル計算機

- アナログ計算機 : 現在では使われない
  - 数値を電圧･電流等で表現
    - 人間の脳も一種のアナログ計算機
    - 将来はDNA分子計算機で復活するかも？
- デジタル計算機 : 現行の計算機
  - 数値を 1 (高電位)と 0 (低電位)の2値で表現
    - 将来は量子計算機へ進化？

24

論理と論理変数

- 論理: 2つの値で表現されるデジタル情報
  - 0 と 1, yes と no, 真と偽
- 論理変数: 0 か1 (のみ)を取る変数
  - スイッチの ON - OFF を表現可能



: 0　電流は流れない
: 1　電流が流れる

25

論理変数が示す値

- 論理変数: **0** か **1** のみを取る変数
  - 2進値
    - 有限桁の数値を2進数で表したもの
    - 算術演算を適用
  - 論理値
    - 数値ではない (0 = 偽, 1 = 真)
    - 論理演算を適用

26

論理値

- 公理 : 論理値
  - 論理変数は 0 か 1 の 2種の値しか取らない

例 : X が論理変数
　$\Rightarrow$ $X = \mathbf{0}$ または $X = \mathbf{1}$

27

単項演算子NOT

- 定義 : 否定,NOT
  ～ではない, 非～, 不～ を表す
  - 演算記号 ‾ ,¬　$\overline{X}$: X ではない
- 公理 : NOT
  - “真”のNOTは“偽”, “偽”のNOTは“真”

$\overline{0} = 1$　$\neg 0 = 1$
$\overline{1} = 0$　$\neg 1 = 0$

X	$\overline{X}$
0	1
1	0

28

2項演算子 AND

- 定義 : 論理積, AND
  ～かつ～ を表す (2項のうち小さい方を取る)
  - 演算記号 ･,∧,∩
- 公理 : AND
  - 両方とも1のときのみ1

$0 \cdot 0 = 0$　$0 \wedge 0 = 0$　$0 \cap 0 = 0$
$0 \cdot 1 = 0$　$0 \wedge 1 = 0$　$0 \cap 1 = 0$
$1 \cdot 0 = 0$　$1 \wedge 0 = 0$　$1 \cap 0 = 0$
$1 \cdot 1 = 1$　$1 \wedge 1 = 1$　$1 \cap 1 = 1$

$X\ Y$	$X \cdot Y$
0 0	0
0 1	0
1 0	0
1 1	1

29

2項演算子 OR

- 定義 : 論理和, OR
  ～または～ を表す (2項のうち大きい方を取る)
  - 演算記号 +,∨,∪
- 公理 : OR
  - 1つでも1のとき1

$0 + 0 = 0$　$0 \vee 0 = 0$　$0 \cup 0 = 0$
$0 + 1 = 1$　$0 \vee 1 = 1$　$0 \cup 1 = 1$
$1 + 0 = 1$　$1 \vee 0 = 1$　$1 \cup 0 = 1$
$1 + 1 = 1$　$1 \vee 1 = 1$　$1 \cup 1 = 1$

$X\ Y$	$X+Y$
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

1+1=2ではない

30

論理関係と論理式

A: 近畿大学生である　B: 東大阪市民である

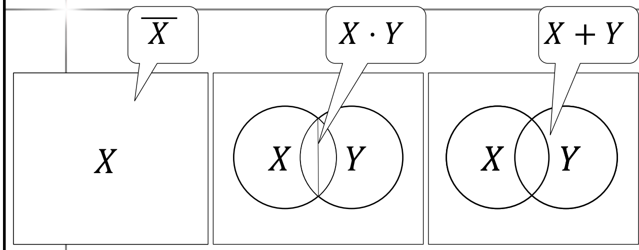
$\overline{A}$: 近畿大学生ではない
$\overline{B}$: 東大阪市民ではない

$A \cdot B$: 近畿大学生であり東大阪市民でもある
$A \cdot \overline{B}$: 近畿大学生であるが東大阪市民ではない
$\overline{A} \cdot B$: 近畿大学生ではないが東大阪市民である
$\overline{A} \cdot \overline{B}$: 近畿大学生でも東大阪市民でもない

$A + B$: 近畿大学生または東大阪市民である
(近畿大学生の東大阪市民を含む)

31

NOT, AND, OR のベン図



NOT　　AND　　OR

32

論理演算子の優先順位

- 括弧()→否定￣→論理積･→論理和＋

例 : $\overline{1 \cdot (0 + \overline{0})}$ の演算順は？

1 . $\overline{1 \cdot (0 + \overline{0})} = \overline{1 \cdot (0 + 1)}$

2 . $\overline{1 \cdot (0 + 1)} = \overline{1 \cdot 1}$

3 . $\overline{1 \circ 1} = \overline{1}$

4 . $\overline{1} = 0$

33

論理関係と論理式

◆ 論理式: 論理関係を表す式

例題　論理関係「『Aである』かつ『Bでない』の両方が成立するか、『Cでない』または『Dである』のいずれかが成立する」を論理式で表すと？

34

論理関数

- $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$
  - 数値関数 $f(x) = 2x^2 + 1$ 等と同じ
  (ただし X も $f(X)$ も 0 か 1 の値しか取らない)

例 : $f(X,Y) = X \cdot Y + \overline{X} \cdot Y + \overline{Y}$

$X = 0, Y = 1$ のとき $f(0,1) = 0 \cdot 1 + \overline{0} \cdot 1 + \overline{1}$
$= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0$
$= 0 + 1 + 0$
$= 1$

35

真理値表

- 関数値を 0 と 1 の表として表す
  - n 変数ならば組み合わせは2^n通り

例 : $f(X,Y) = \overline{X} \cdot Y + X \cdot \overline{Y}$ の真理値表

X Y	f(X, Y)
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	0

36

真理値表の例題

例題 : $f(X,Y) = X \cdot \overline{Y} + \overline{X} \cdot Y$ を表す
真理値表を示せ

$X\ Y$	$f(X,Y)$
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	0

$$0 \cdot \overline{0} + \overline{0} \cdot 0 = 0 + 0 = 0$$
$$0 \cdot \overline{1} + \overline{0} \cdot 1 = 0 + 1 = 1$$
$$1 \cdot \overline{0} + \overline{1} \cdot 0 = 1 + 0 = 1$$
$$1 \cdot \overline{1} + \overline{1} \cdot 1 = 0 + 0 = 0$$

37

38

基本の論理演算

否定	NOT	$\overline{0} = 1$	$\overline{1} = 0$		
論理積	AND	$0 \cdot 0 = 0$	$0 \cdot 1 = 0$	$1 \cdot 0 = 0$	$1 \cdot 1 = 1$
論理和	OR	$0 + 0 = 0$	$0 + 1 = 1$	$1 + 0 = 1$	$1 + 1 = 1$
否定論理積	NAND	$\overline{0 \cdot 0} = 1$	$\overline{0 \cdot 1} = 1$	$\overline{1 \cdot 0} = 1$	$\overline{1 \cdot 1} = 0$
否定論理和	NOR	$\overline{0 + 0} = 1$	$\overline{0 + 1} = 0$	$\overline{1 + 0} = 0$	$\overline{1 + 1} = 0$
排他的論理和	EXOR	$0 \oplus 0 = 0$	$0 \oplus 1 = 1$	$1 \oplus 0 = 1$	$1 \oplus 1 = 0$

NOT

X	$\overline{X}$
0	1
1	0

AND

$X\ Y$	$X \cdot Y$
0 0	0
0 1	0
1 0	0
1 1	1

OR

$X\ Y$	$X + Y$
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

NAND

$X\ Y$	$\overline{X \cdot Y}$
0 0	1
0 1	1
1 0	1
1 1	0

NOR

$X\ Y$	$\overline{X + Y}$
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	0

EXOR

$X\ Y$	$X \oplus Y$
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	0

$X \oplus Y = \overline{X} \cdot Y + X \cdot \overline{Y}$

論理演算の公理

有界則	$X \cdot 0 = 0$	$X + 1 = 1$
同一則	$X \cdot 1 = X$	$X + 0 = X$
べき等則	$X \cdot X = X$	$X + X = X$
相補則	$X \cdot \overline{X} = 0$	$X + \overline{X} = 1$
二重否定	$\overline{\overline{X}} = X$	
交換則	$X \cdot Y = Y \cdot X$	$X + Y = Y + X$
結合則	$X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$	$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$
分配則	$X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$	$X + Y \cdot Z = (X + Y) \cdot (X + Z)$
吸収則	$X + X \cdot Y = X$	$X \cdot (X + Y) = X$
ド・モルガン則	$\overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y}$	$\overline{X + Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$

39

有界則

◆ 定理 : 有界則

$X \cdot 0 = 0$ (ANDの公理より)

$X + 1 = 1$ (ORの公理より)　($X \neq 0$でも成立)

X	$X \cdot 0$
0	0
1	0

X	$X+1$
0	1
1	1

40

有界則の証明

◆ 定理 : 有界則

$X \cdot 0 = 0$ (ANDの公理より)

$X + 1 = 1$ (ORの公理より)

(証明) 論理変数は 0 か 1 の値しか取らない)ので、
X に 0,1を代入すればAND,ORの公理になり、
明らか成立する

注: 上2式は双対(後述)である
従って片方が成立すればもう片方も成立する

41

同一則

◆ 定理 : 同一則

$X \cdot 1 = X$ (ANDの公理より)

$X + 0 = X$ (ORの公理より)

X	$X \cdot 1$
0	0
1	1

X	$X+0$
0	0
1	1

42

べき等則

◆ 定理 : べき等則

$X \cdot X = X$ (ANDの公理より) (X^2ではない)

$X + X = X$ (ORの公理より)　(2Xではない)

X	$X \cdot X$
0	0
1	1

X	$X+X$
0	0
1	1

43

べき等則の証明

◆ 定理 : べき等則

$X \cdot X = X$ (ANDの公理より)

$X + X = X$ (ORの公理より)

(証明) 二項演算子・は両項の小さい方を取る演算である

XとXの小さい方はXであるので

$X \cdot X = X$が成り立つ

$X + X = X$も同様である

44

べき等則の系

◆ 系 : べき等則

$X \cdot X \cdot \ldots \cdot X = X$ (べき等則の定理より)

$X + X + \ldots + X = X$ (べき等則の定理より)

(証明) べき等則を繰り返して用いれば明らか

45

相補則

◆ 定理 : 相補則・補元則

$\overline{X} \cdot X = 0$ (ANDの公理より)

$\overline{X} + X = 1$ (ORの公理より)

X	$\overline{X} \cdot X$
0	0
1	0

X	$\overline{X} + X$
0	1
1	1

46

2重否定

◆ 定理 : 2重否定 対合則

$\overline{\overline{X}} = X$

X	$\overline{\overline{X}}$
0	0
1	1

47

交換則

◆ 定理 : 交換則

$X \cdot Y = Y \cdot X$ (ANDの公理より)

$X + Y = Y + X$ (ORの公理より)

$X\,Y$	$X \cdot Y$	$Y \cdot X$
0 0	0	0
0 1	0	0
1 0	0	0
1 1	1	1

$X\,Y$	$X+Y$	$Y+X$
0 0	0	0
0 1	1	1
1 0	1	1
1 1	1	1

48

交換則(数式との比較)

◆ 定理 : 交換則

$X \cdot Y = Y \cdot X$ (ANDの公理より)

$X + Y = Y + X$ (ORの公理より)

✓ 数式だと… (a,b,c :実数 A,B,C:行列)

- $ab = ba$ (成立)
- $a+b = b+a$ (成立)
- $A \cdot B \neq B \cdot A$ (不成立)
- $A+B = B+A$ (成立)
- $a-b \neq b-a$ (不成立)

49

結合則

◆ 定理 : 結合則

$(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$ (ANDの公理より)

$(X+Y)+Z = X+(Y+Z)$ (ORの公理より)

XYZ	$(X \cdot Y) \cdot Z$	$X \cdot (Y \cdot Z)$	XYZ	$(X \cdot Y) \cdot Z$	$X \cdot (Y \cdot Z)$
0 0 0	0	0	1 0 0	0	0
0 0 1	0	0	1 0 1	0	0
0 1 0	0	0	1 1 0	0	0
0 1 1	0	0	1 1 1	1	1

50

結合則(数式との比較)

◆ 定理 : 結合則

$(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$ (ANDの公理より)

$(X+Y)+Z = X+(Y+Z)$ (ORの公理より)

✓ 数式だと… (a,b,c :実数 A,B,C:行列)

- $(ab)c = a(bc)$ (成立)
- $(a+b)+c = a+(b+c)$ (成立)
- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (成立)
- $(A+B)+C = A+(B+C)$ (成立)
- $(a-b)-c \neq a-(b-c)$ (不成立)

51

分配則

◆ 定理 : 分配則

$X \cdot (Y+Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$

$X+(Y \cdot Z) = (X+Y) \cdot (X+Z)$

XYZ	$X \cdot (Y+Z)$	$XY+XZ$	XYZ	$X \cdot (Y+Z)$	$XY+XZ$
0 0 0	0	0	1 0 0	0	0
0 0 1	0	0	1 0 1	1	1
0 1 0	0	0	1 1 0	1	1
0 1 1	0	0	1 1 1	1	1

52

分配則(数式との比較)

◆ 定理 : 分配則

$X \cdot (Y+Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$

$X+(Y \cdot Z) = (X+Y) \cdot (X+Z)$

✓ 数式だと… (a,b,c :実数 A,B,C:行列)

- $a(b+c) = ab + ac$ (成立)
- $a+bc \neq (a+b)(a+c)$ (不成立)
- $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$ (成立)
- $A + B \cdot C \neq (A+B) \cdot (A+C)$ (不成立)

53

吸収則

◆ 定理 : 吸収則

$X + (X \cdot Y) = X$

$X \cdot (X+Y) = X$

XY	$X+(X \cdot Y)$	$X \cdot (X+Y)$
0 0	0	0
0 1	0	0
1 0	1	1
1 1	1	1

54

その他便利な規則

◆その他の系

$X + (\overline{X} \cdot Y) = X + Y$

$X \cdot (\overline{X} + Y) = X \cdot Y$

$X\ Y$	$X+(\overline{X}\cdot Y)$	$X\cdot(\overline{X}+Y)$
0 0	0	0
0 1	1	0
1 0	1	0
1 1	1	1

55

その他の系の証明(1)

◆その他の系

$X + (\overline{X} \cdot Y) = X + Y$

$X \cdot (\overline{X} + Y) = X \cdot Y$

(証明)

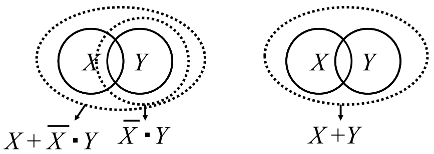
$X + (\overline{X} \cdot Y) = (X + \overline{X}) \cdot (X + Y)$ (分配則)

$= 1 \cdot (X + Y)$ (相補則)

$= X + Y$ (同一則)

56

その他の系の証明(2)



XとYを寄せ集める(右辺: $X+Y$)とき、Xに含まれるY(つまり$X \cdot Y$)は不要なので$\overline{X} \cdot Y$のみを寄せ集めると良い

57

ド・モルガンの定理

◆定理 : ド・モルガンの定理

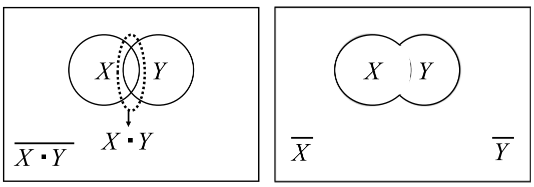
$\overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y}$

$\overline{X + Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$

$X\ Y$	$\overline{X \cdot Y}$	$\overline{X} + \overline{Y}$	$\overline{X + Y}$	$\overline{X} \cdot \overline{Y}$
0 0	1	1	1	1
0 1	1	1	0	0
1 0	1	1	0	0
1 1	0	0	0	0

58

ド・モルガンの定理の証明



59

多変数のド・モルガンの定理

◆系 : 多変数ド・モルガンの定理

$\overline{X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n} = \overline{X_1} + \overline{X_2} + \ldots + \overline{X_n}$

$\overline{X_1 + X_2 + \ldots + X_n} = \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot \ldots \cdot \overline{X_n}$

(式中の $\boldsymbol{X_i}$ と $\overline{\boldsymbol{X_i}}$, ・と+, **1** と **0** を入れ替え,全体のNOTを取る)

(証明) ド・モルガンの定理を繰り返し用いれば明らか

60

ド・モルガンの系

$\overline{X\cdot Y}=\overline{X}+\overline{Y}$

$\overline{X+Y}=\overline{X}\cdot\overline{Y}$

両辺の否定を取って

◆系

$X\cdot Y=\overline{\overline{X}+\overline{Y}}$

$X+Y=\overline{\overline{X}\cdot\overline{Y}}$

ANDはNOTとORで、ORはNOTとANDで表せる

61

拡張されたド・モルガンの定理

◆定理 : 拡張ド・モルガンの定理

$L = f(X_1, X_1, X_2, X_2, \ldots, X_m, X_m, \cdot, +, 1, 0)$

$\Rightarrow L = f(X_1, X_1, X_2, X_2, \ldots, X_m, X_m, +, \cdot, 0, 1)$

(式中の X_i と $\overline{X_i}$, ・と +, **1** と **0** を入れ替える)

例: $L = X\cdot Y + Y\cdot Z + 0$

$L = (X+Y)\cdot(Y+Z)\cdot 1$

注: 演算子の優先順位に注意すること

62

有界則	$X\cdot 0=0$	$X+1=1$
同一則	$X\cdot 1=X$	$X+0=X$
べき等則	$X\cdot X=X$	$X+X=X$
相補則	$X\cdot\overline{X}=0$	$X+\overline{X}=1$
二重否定	$\overline{\overline{X}}=X$	
交換則	$X\cdot Y=Y\cdot X$	$X+Y=Y+X$
結合則	$X\cdot(Y\cdot Z)=(X\cdot Y)\cdot Z$	$X+(Y+Z)=(X+Y)+Z$
分配則	$X\cdot(Y+Z)=X\cdot Y+X\cdot Z$	$X+Y\cdot Z=(X+Y)\cdot(X+Z)$
吸収則	$X+X\cdot Y=X$	$X\cdot(X+Y)=X$
ド・モルガン則	$\overline{X\cdot Y}=\overline{X}+\overline{Y}$	$\overline{X+Y}=\overline{X}\cdot\overline{Y}$

63

双対な論理式

■ 論理式 L の双対な論理式 $\boldsymbol{L^d}$

L の **0** と **1**, ・と + を入れ替えたもの

例: $L=\overline{(1\cdot Y)}+(0+(X\cdot\overline{Z}))$ の L^d は？

$L^d=\overline{(0+Y)}\cdot(1\cdot(X+\overline{Z}))$

注: 演算子の優先順位に注意すること

64

双対な論理式の例

$L = (1\cdot Y)+(0+(X\cdot Z))$

$L^d = (0+Y)\cdot(1\cdot(X+Z))$

XYZ	L	L^d
0 0 0	1	1
0 0 1	1	1
0 1 0	0	0
0 1 1	1	0

XYZ	L	L^d
1 0 0	1	0
1 0 1	1	1
1 1 0	0	0
1 1 1	0	0

$L=L^d$ では無いことに注意

65

双対な論理式の関係

$L = (1\cdot Y)+(0+(X\cdot Z))$

$L^d = (0+Y)\cdot(1\cdot(X+Z))$

XYZ	L
0 0 0	1
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	0

XYZ	L^d
1 1 1	0
1 1 0	0
1 0 1	1
1 0 0	1
0 1 1	0
0 1 0	0
0 0 1	0
0 0 0	1

入力の0と1を
入れ替えたときに
出力の0と1が
入れ替わる

66

双対性

◆ 定理 : 双対性 $P = Q$ ならば $P^d = Q^d$

例: $P = X + \overline{Y},\quad Q = \overline{\overline{X} \cdot Y}$

$P^d = X \cdot \overline{Y},\quad Q^d = \overline{\overline{X} + Y}$

XY	P	Q	P^d	Q^d
0 0	1	1	0	0
0 1	0	0	0	0
1 0	1	1	1	1
1 1	1	1	0	0

67

双対性の証明

◆ 定理 : 双対性 $P = Q$ ならば $P^d = Q^d$

(証明) ある論理式L が公理に含まれるとき、
その双対な論理式L^d も公理に含まれる

$(0+1 = 1$ (ORの公理) の双対は

$1 \cdot 0 = 0$ (ANDの公理))

従って P に対して P^d が一意に決まる

よって $P = Q$ ならば $P^d = Q^d$ となる

注: 双対性とは、$P^d = P$ ではない

68

双対性の利点

- ある論理式 L を定義すれば、それと双対な論理式 L^d が存在する
  - 論理代数の定理のほとんどは対になる
  - 定理の証明は片方に対してのみ行えばよい

69

相対な式

(有界則) (相補則)

(同一則) (交換則)

(べき等則) (吸収則)

多くの公式が相対な式の組

70

双対関数

◆定義 : 双対関数

(式中の ・ と + , **1** と **0** を入れ替える)

71

ド・モルガンの定理と双対関数

$L = f(X_1, \overline{X_1}, X_2, \overline{X_2}, \ldots, X_m, \overline{X_m}, \cdot, +, 1, 0)$

■ド・モルガンの定理

$\overline{L} = f(\overline{X_1}, X_1, \overline{X_2}, X_2, \ldots, \overline{X_m}, X_m, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$

(式中の$\boldsymbol{X_i}$ と $\overline{\boldsymbol{X_i}}$, ・と +, **1** と **0** を入れ替える)

■ 双対関数

$L^d = f(\overline{X_1}, X_1, \overline{X_2}, X_2, \ldots, \overline{X_m}, X_m, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$

(式中の・と +, **1** と **0** を入れ替る)

72

ド・モルガンの定理と双対関数

$f(X,Y,Z)=(X\cdot Z)+(Y\cdot Z\cdot 1)$

■ ド・モルガンの定理

$f(X,Y,Z)=(X+Z)\cdot(Y+Z+0)$

(式中の X_i と $\overline{X}_i$, ・と +, 1 と 0 を入れ替える)

■ 双対関数

$f^d(X,Y,Z)=(X+Z)\cdot(Y+Z+0)$

(式中の ・ と + , 1 と 0 を入れ替える)

73

自己双対関数

◆ 定義 : 自己双対関数

- $f=f^d$ のとき f を自己双対関数と言う

例 : $f(X, Y, Z) = X\cdot Y + Y\cdot Z + Z\cdot X$

$$
\begin{aligned}
f^d(X, Y, Z) &= (X+Y)\cdot(Y+Z)\cdot(Z+X) \\
&= (Z\cdot X+Y)\cdot(Z+X) \\
&= X\cdot Y + Y\cdot Z + Z\cdot X \\
&= f(X, Y, Z)
\end{aligned}
$$

74

論理式の標準形

■ 論理関数は論理式で表される

- 論理関数の解析
- 論理回路の設計
- 2つの論理関数間の等価性の判定

⇒論理式の標準形があれば便利

75

論理積項・論理和項

■ 論理積項 : AND と NOT のみの式

例 : $X\cdot Y\cdot Z$

■ 論理和項 : OR と NOT のみの式

例 : $X+Y+Z$

76

積和形・和積系

■ 積和形(AND-OR形)

➢論理積項の和で表される式

例 : $X\cdot Y+Y\cdot Z$

■ 和積形(OR-AND形)

➢論理和項の積で表される式

例 : $(X+Y)\cdot(Y+Z)$

77

最小項

◆ 定義 : 最小項

最小項(あるいは極小項)

全ての変数の積 $\tilde{X}_1\cdot\tilde{X}_2\cdot\ldots\cdot\tilde{X}_n$

($\tilde{X}_i$ は X_i または $\overline{X}_i$ を表す)

➢ n 変数の式の場合、最小項は 2^n 個

78

最小項

- 例題 $f(X,Y,Z)$ の最小項を全て書け
  - 3変数なので最小項は$2^3 = 8$通り

79

最小項と真理値表/カルノー図

- 最小項は真理値表のある1マスに相当

$X\,Y\,Z$	$f(X, Y, Z)$
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	0

最小項 $X \cdot \overline{Y} \cdot Z$

$Z \backslash X\,Y$	0 0	0 1	1 1	1 0
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1

80

標準積和形

- 定義：標準積和形, 主加法標準系, 最小項表現
  - n 変数論理関数の標準積和形
    $f(l_1, l_2, \ldots, l_n) = 1$ となる最小項の和

標準積和形の例

全て最小項

81

標準積和形の例

例題 $f(X,Y,Z) = X \cdot \overline{Y} + Y \cdot \overline{Z}$ の標準積和形

$X\,Y\,Z$	最小項	$f(X,Y,Z)$
0 0 0	$\overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z}$	
0 0 1	$\overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot Z$	
0 1 0	$\overline{X} \cdot Y \cdot \overline{Z}$	
0 1 1	$\overline{X} \cdot Y \cdot Z$	
1 0 0	$X \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z}$	
1 0 1	$X \cdot \overline{Y} \cdot Z$	
1 1 0	$X \cdot Y \cdot \overline{Z}$	
1 1 1	$X \cdot Y \cdot Z$	

82

標準積和形の例

例題 $f(X,Y,Z) = X \cdot \overline{Y} + Y \cdot \overline{Z}$ の標準積和形

$X\,Y\,Z$	最小項	$f(X,Y,Z)$
0 0 0	$\overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z}$	0
0 0 1	$\overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot Z$	0
0 1 0	$\overline{X} \cdot Y \cdot \overline{Z}$	1
0 1 1	$\overline{X} \cdot Y \cdot Z$	0
1 0 0	$X \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z}$	1
1 0 1	$X \cdot \overline{Y} \cdot Z$	1
1 1 0	$X \cdot Y \cdot \overline{Z}$	1
1 1 1	$X \cdot Y \cdot Z$	0

$$
\begin{aligned}
f(X,Y,Z) &= \overline{X} \cdot Y \cdot \overline{Z} \\
&+ X \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z} \\
&+ X \cdot \overline{Y} \cdot Z \\
&+ X \cdot Y \cdot \overline{Z}
\end{aligned}
$$

83

標準積和形の利用

- どんな論理式も
  - 唯一の標準積和形を持つ
  - 標準積和形に変換(展開)できる
- 形が異なる2つの論理式の異同を調べたい
  ⇒両者を標準積和形に変形すれば良い

84

標準積和形の例題

例題 : $f(X,Y) = X + Y$ を標準積和形にせよ

$X\,Y$	最小項	$f(X,Y)$
0 0	$\overline{X}\cdot\overline{Y}$	0
0 1	$\overline{X}\cdot Y$	1
1 0	$X\cdot\overline{Y}$	1
1 1	$X\cdot Y$	1

$f(0,1) = f(1,0) = f(1,1) = 1$ より

85

標準積和形の例題

例題 : $f(X,Y) = X + \overline{X}\cdot Y$ と
$g(X,Y) = X + Y$ が
同値であることを示せ

$X\,Y$	$f(X,Y)$	$g(X,Y)$
0 0	0	0
0 1	1	1
1 0	1	1
1 1	1	1

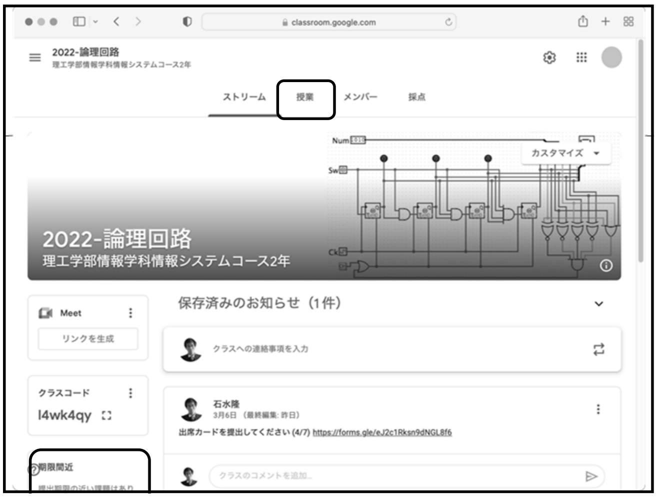
よって $f(X,Y) = g(X,Y)$

86

課題テスト

- 毎週 GoogleClassroom上で課題テストを行う
  - 授業後～翌週の授業開始まで
- GoogleClassroomで
  論理回路
  ⇒授業
  ⇒その回の課題
  と辿る

87



88

89

90

91

問題：NOT, AND, OR演算

NOT, AND, OR演算をせよ

NOT	AND	OR
$\overline{0}=$	$0 \cdot 0 =$	$0+0=$
$\overline{1}=$	$0 \cdot 1 =$	$0+1=$
	$1 \cdot 0 =$	$1+0=$
	$1 \cdot 1 =$	$1+1=$

92

問題：ド･モルガンの定理

以下の式を積和形にせよ

$$\overline{X \cdot Y \cdot Z} =$$

$$\overline{\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}} =$$

93

問題：最小項

$f(X,Y) = \overline{X} + Y$ に対して,
$f(X, Y) = 1$となる最小項を全て挙げよ

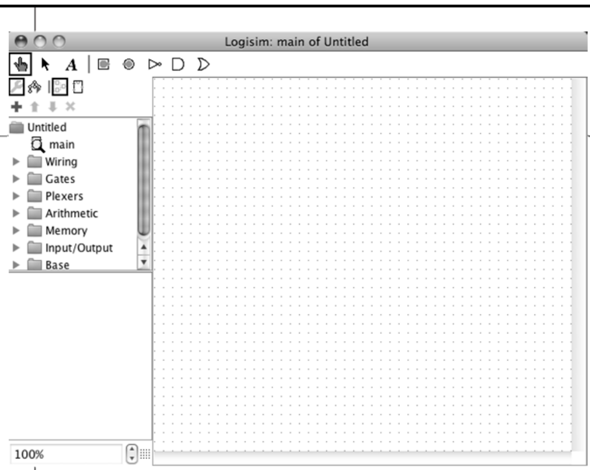
$X\ Y$	$f(X, Y)$
0 0	
0 1	
1 0	
1 1	

94

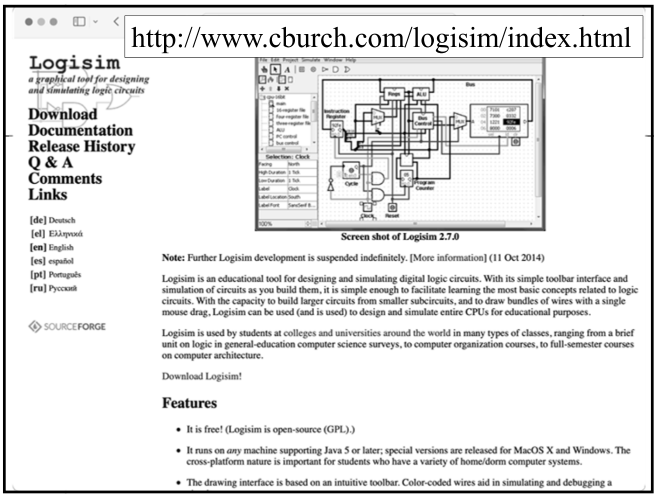
Logisim

- Logisim
  - 論理回路のシミュレータ
    - 論理素子やモジュールを使用可能
    - フリーソフト
  - Logisimのホームページ
    - http://www.cburch.com/logisim/
  - 第4回(4/28)にLogisimを用いた実習を行う予定

95



96



97

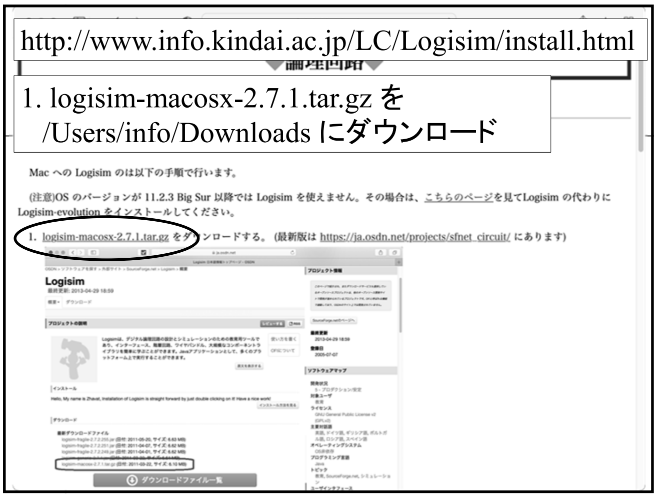
Logisimのインストール

- ノートPCに Logisim をインストール
  - 論理回路のページにインストール方法を記載

http://www.info.kindai.ac.jp/LC/Logisim

98

99



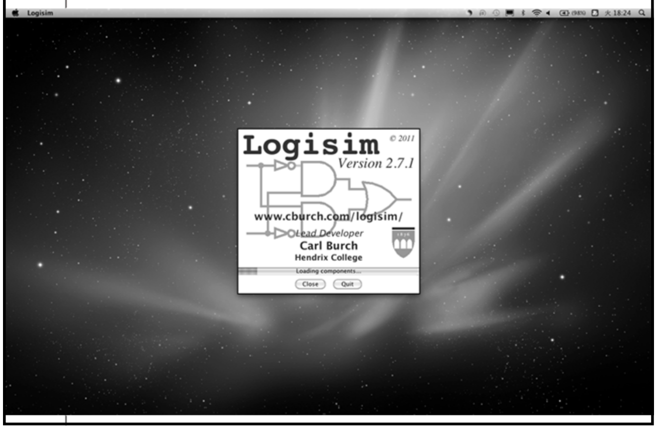
100

101

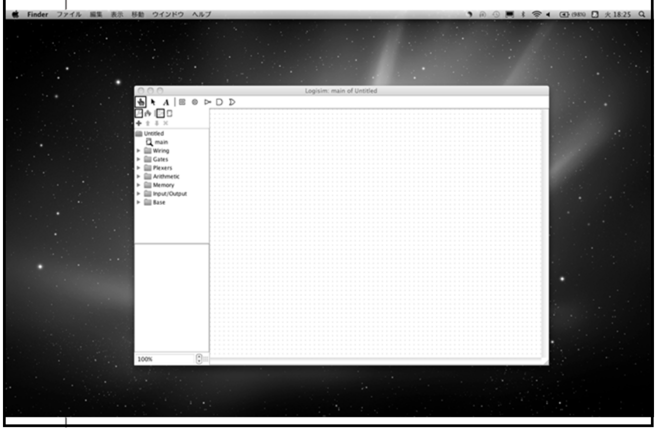
102

3. Logisim.app をクリック

103



104

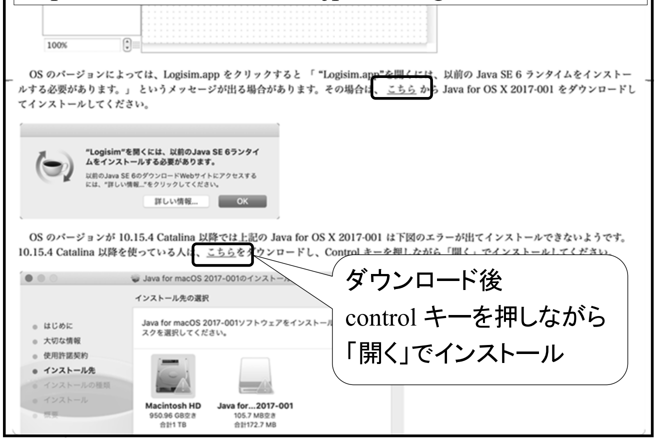


105

エラーが出る場合

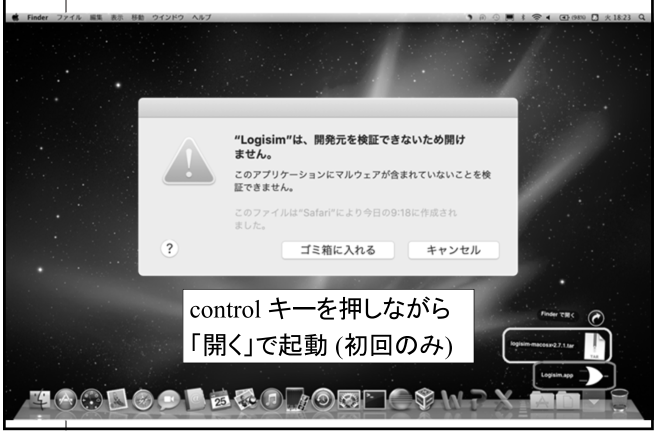
106

http://www.info.kindai.ac.jp/LC/Logisim/install.html



107

エラーが出る場合



108

OS が 11.2.3 以降の場合

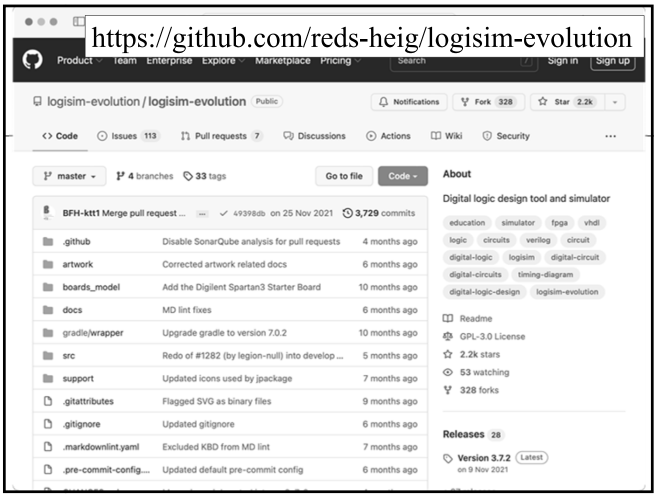
109

Logisim-evolution

- Logisim-evolution
  - Logisim のフォーク版
  (Logisim をベースに開発されたソフトウェア)

110

https://github.com/reds-heig/logisim-evolution

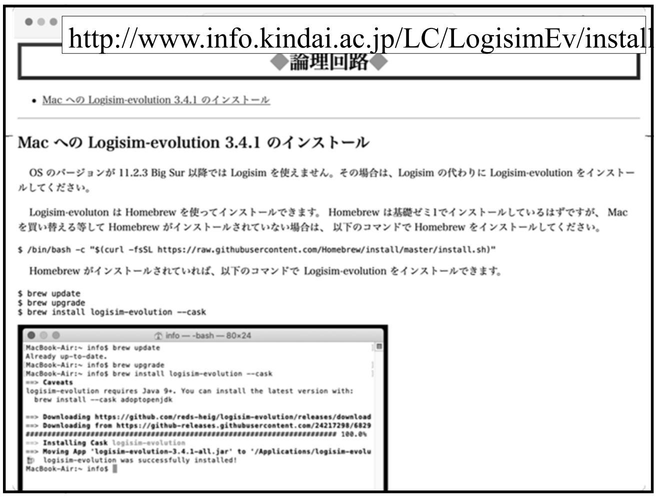


111

https://www.info.kindai.ac.jp/LC/

112

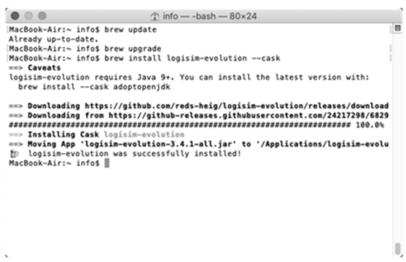
http://www.info.kindai.ac.jp/LC/LogisimEv/install



113

ターミナル上で

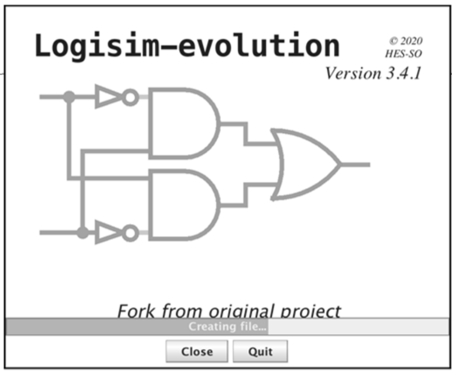
```
$ brew update
$ brew upgrade
$ brew install logisim-evolution --cask
```



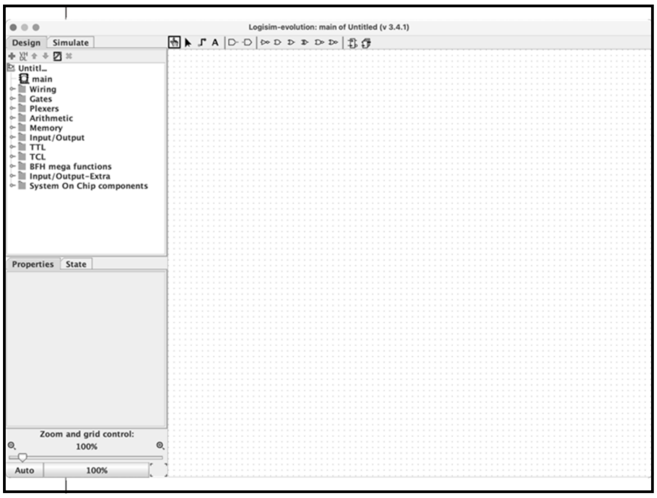
114

115

116



117



118

が出る場合は

ターミナル上で

```
$ java -jar /Applications/logisim-evolution.jar &
```

119

演習問題 : NOT, AND, OR演算

NOT, AND, OR演算の真理値表を作成せよ

NOT

X	$\overline{X}$
0	1
1	0

AND

$X\ Y$	$X \cdot Y$
0 0	0
0 1	0
1 0	0
1 1	1

OR

$X\ Y$	$X+Y$
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

120

演習問題:有界則, 同一則

以下の演算をせよ

有界則 $X \cdot 0 = 0 \quad X + 1 = 1$

同一則 $X \cdot 1 = X \quad X + 0 = X$

$X \cdot Y \cdot 0 = 0 \qquad X + Y + 1 = 1$

$X \cdot Y \cdot 1 = X \cdot Y \quad X + Y + 0 = X + Y$

演習問題:相補則, 分配則

以下の演算をせよ

相補則 $X \cdot \overline{X} = 0 \quad X + \overline{X} = 1$

分配則 $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$
$X + Y \cdot Z = (X + Y) \cdot (X + Z)$

$X \cdot \overline{X} + Y + \overline{Y} = 0 + 1 = 1$

$(\overline{X} + \overline{Y}) \cdot \mathrm{Z} = \overline{X} \cdot Z + \overline{Y} \cdot Z$

演習問題：双対な論理式

$f(X,Y) = (X + Y + 0) \cdot 1$ の
双対な論理式 f^d を求めよ

(式中の ・と +, **1** と **0** を入れ替える)

$f^{\mathrm{d}}(X,Y) = (X \cdot Y \cdot 1) + 0$

$= X \cdot Y$

演習問題：ド･モルガンの定理

以下の式を積和形にせよ

$\overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y}$

$\overline{\overline{X} + \overline{Y}} = \overline{\overline{X}} \cdot \overline{\overline{Y}}$

$= X \cdot Y$

演習問題：標準積和形

$f(X,Y) = X + \overline{Y}$ を標準積和形にせよ

$X\ Y$	$f(X, Y)$
0 0	1
0 1	0
1 0	1
1 1	1

$f(X, Y) = \overline{X} \cdot \overline{Y}$
$+ X \cdot \overline{Y}$
$+ X \cdot Y$

参考資料:最大項

- 定義：最大項
  最大項(あるいは極大項)
  全ての変数の和 $\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_n$
  ($\tilde{X}_i$ は X_i または $\overline{X_i}$ を表す)
- n 変数の式の場合、最大項は 2^n 個

参考資料:最大項

■ 例題 $f(X,Y,Z)$ の最大項を全て書け

– 3変数なので最大項は$2^3 = 8$通り

参考資料:最大項

■ 最大項は真理値表のある1マス以外の全てのマスに相当

XYZ	$f(x,y,z)$
0 0 0	1
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	1
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

最大項 $X+\overline{Y}+Z$

Z \ XY	0 0	0 1	1 1	1 0
0	1	0	1	1
1	1	1	1	1

参考資料: 標準和積形

◆ 定義 : 標準和積形, 主乗法標準系, 最大項表現

➢n 変数論理関数の標準和積形

$f(\overline{l_1}, \overline{l_2}, \ldots, \overline{l_n}) = 0$となる最大項の積

$f(1,1,1) = f(0,1,1) = f(0,0,1) = f(0,0,0) = 0$

参考資料: 標準和積形の例題

例題: $f(X,Y) = X + Y$ を標準積和形にせよ

XYZ	$f(X,Y,Z)$	XYZ	$f(X,Y,Z)$
0 0 0	0	1 0 0	1
0 0 1	0	1 0 1	1
0 1 0	1	1 1 0	1
0 1 1	1	1 1 1	1

$f(0,0,0)=f(0,0,1)=0$より

$f(X,Y,Z) = (X+Y+Z) \cdot (X+Y+\overline{Z})$

参考資料: リテラル

◆ 定義 : リテラル

– 論理式を構成する論理変数とその否定

➢論理変数 X のリテラル $\widetilde{X}$ は $\boldsymbol{X}$ と $\overline{\boldsymbol{X}}$

リテラルを使う利点

NOTを気にせずAND,ORのみに着目できる

参考資料: 一般化吸収則

◆ 定理 : 一般化吸収則

$-\boldsymbol{X_i} + f(X_1,\ldots,\boldsymbol{X_i},\ldots,X_n)$

$= X_i + f(X_1,\ldots,\boldsymbol{0},\ldots,X_n)$

$-\boldsymbol{X_i} \cdot f(X_1,\ldots,\boldsymbol{X_i},\ldots,X_n)$

$= X_i \cdot f(X_1,\ldots,\boldsymbol{1},\ldots,X_n)$

(証明) $X_i = 1$ とのき上式は両辺とも1

$X_i = 0$ とのき上式は両辺とも$f(X_1,\ldots,0,\ldots,X_n)$

参考資料: 一般化吸収則の例

◆ 定理：一般化吸収則

– $\boldsymbol{X_i} + f(X_1,\ldots,\boldsymbol{X_i},\ldots,X_n)$
$= X_i + f(X_1,\ldots,\mathbf{0},\ldots,X_n)$

– $\boldsymbol{X_i} \cdot f(X_1,\ldots,\boldsymbol{X_i},\ldots,X_n)$
$= X_i \cdot f(X_1,\ldots,\mathbf{1},\ldots,X_n)$

例：$f(X,Y) = X \cdot Y + \overline{X} \cdot \overline{Y}$

$\boldsymbol{X} + f(\boldsymbol{X},Y) = X + f(\mathbf{0},Y)$
$= X + \mathbf{0} \cdot Y + \mathbf{1} \cdot \overline{Y}$
$= X + \overline{Y}$

133

参考資料: 一般吸収則の性質

- $X_i + f(X_1,\ldots,X_i,\ldots,X_n) = X_i + f(X_1,\ldots,0,\ldots,X_n)$
- $X_i \cdot f(X_1,\ldots,X_i,\ldots,X_n) = X_i \cdot f(X_1,\ldots,1,\ldots,X_n)$

✓ 下式において、$X_i = 1$ のとき
$f(X_1,\ldots,\boldsymbol{X_i},\ldots,X_n) = \mathbf{1} \cdot f(X_1,\ldots,\mathbf{1},\ldots,X_n)$
$= f(X_1,\ldots,1,\ldots,X_n)$

✓ 上式において、$X_i = 0$ のとき
$f(X_1,\ldots,\boldsymbol{X_i},\ldots,X_n) = \mathbf{0} + f(X_1,\ldots,\mathbf{0},\ldots,X_n)$
$= f(X_1,\ldots,0,\ldots,X_n)$

134

参考資料: 一般吸収則の性質

$$f(X_1,\ldots,\boldsymbol{X_i},\ldots,X_n) = \begin{cases} f(X_1,\ldots,\mathbf{1}_i,\ldots,X_n) & (X_i = 1\text{のとき}) \\ f(X_1,\ldots,\mathbf{0}_i,\ldots,X_n) & (X_i = 0\text{のとき}) \end{cases}$$

if ($\boldsymbol{X_i}$)
then $f(X_1,\ldots,\boldsymbol{X_i},\ldots,X_n) = f(X_1,\ldots,\mathbf{1},\ldots,X_n)$
$= \boldsymbol{X_i} \cdot f(X_1,\ldots,\mathbf{1},\ldots,X_n)$
else $f(X_1,\ldots,\boldsymbol{X_i},\ldots,X_n) = f(\overline{X_1},\ldots,\mathbf{0},\ldots,X_n)$
$= \boldsymbol{X_i} \cdot f(\overline{X_1},\ldots,\mathbf{0},\ldots,X_n)$

➢ $f(X_1,\ldots,\boldsymbol{X_i},\ldots,X_n) = \boldsymbol{X_i} \cdot f(X_1,\ldots,\mathbf{1},\ldots,X_n) + \overline{\boldsymbol{X_i}} \cdot f(X_1,\ldots,\mathbf{0},\ldots,X_n)$

135

参考資料: シャノンの展開定理

◆ 定理：シャノンの展開定理

– $f(X_1,\ldots,\boldsymbol{X_i},\ldots,X_n) = \boldsymbol{X_i} \cdot f(X_1,\ldots,\mathbf{1},\ldots,X_n) + \overline{\boldsymbol{X_i}} \cdot f(X_1,\ldots,\mathbf{0},\ldots,X_n)$

– $f(X_1,\ldots,\boldsymbol{X_i},\ldots,X_n) = (\boldsymbol{X_i} + f(X_1,\ldots,\mathbf{0},\ldots,X_n)) \cdot (\overline{\boldsymbol{X_i}} + f(X_1,\ldots,\mathbf{1},\ldots,X_n))$

✓シャノンの展開定理の効果

➢関数 f が X_i と $\overline{X_i}$ で展開される

X_i に関する積和形(和積系)に変形可能

136

参考資料: シャノンの展開定理による積和形

■ 例題 $f(X,Y,Z) = X \cdot \overline{Y} + X \cdot Z$ を Y に関して展開し積和形にせよ

$f(X,Y,Z)$
$= Y \cdot f(X,1,Z) + \overline{Y} \cdot f(X,0,Z)$
$= Y \cdot (X \cdot 0 + X \cdot Z) + \overline{Y} \cdot (X \cdot 1 + X \cdot Z)$
$= Y \cdot (0 + X \cdot Z) + \overline{Y} \cdot (X + X \cdot Z)$
$= Y \cdot X \cdot Z + \overline{Y} \cdot X$

137

参考資料: 積和形への変形

■ 全ての変数に対してシャノンの展開を使えばどんな論理関数でも積和形になる

$f(X_1, X_2,\ldots,X_n)$
$= \boldsymbol{X_1} \cdot f(\mathbf{1}, X_2,\ldots,X_n) + \overline{\boldsymbol{X_1}} \cdot f(\mathbf{0}, X_2,\ldots,X_n)$
$= X_1 \cdot \boldsymbol{X_2} \cdot f(1,\mathbf{1},\ldots,X_n) + X_1 \cdot \overline{\boldsymbol{X_2}} \cdot f(1,\mathbf{0},\ldots,X_n)$
$+ \overline{X_1} \cdot \boldsymbol{X_2} \cdot f(0,\mathbf{1},\ldots,X_n) + \overline{X_1} \cdot \overline{\boldsymbol{X_2}} \cdot f(0,\mathbf{0},\ldots,X_n)$
$= \ldots$
$= X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n \cdot f(1,1,\ldots,1) + \ldots$

138