

# 情報論理工学 研究室

第4回：  
2人有限零和ゲーム



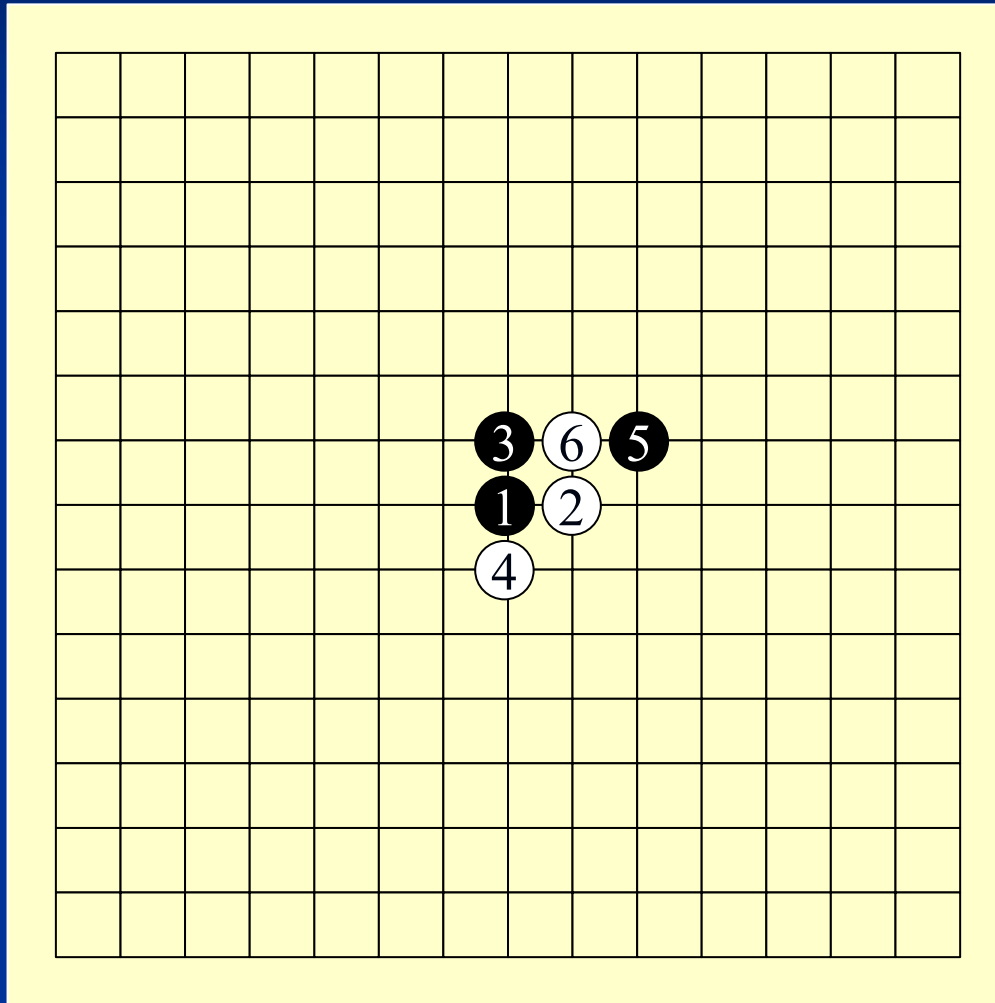
# ゲームの分類

分類			
人数	1人	2人	多人数
協力可能性	対決型		協力型
利得	零和		非零和
有限性	有限		無限
情報秘匿性	完全情報		不完全情報
確定性	確定		非確定
手番	順次型	同時型	反射型

# 2人零和有限確定完全情報ゲーム

- 人数: 2人でプレイ
- 零和: 双方の得点を足すと常に0
  - 得点するには相手から奪う必要あり
- 有限: 可能な局面の数が有限
  - 各手番で指せる・打てる手の数が有限
  - 有限時間内にゲームが終了する
- 確定: ランダム性が無い
- 完全情報: ゲームの情報は全て公開
  - 手札を隠したり山札から引いたりしない

# 2人零和有限確定完全情報 ゲームの例：連珠



人数

2人

零和

自分が勝つ=相手を負かす

有限

置ける石の位置は有限

確定

ランダム性が無い

完全情報

全ての情報が公開

# 2人零和有限確定完全 情報ゲームの特徴

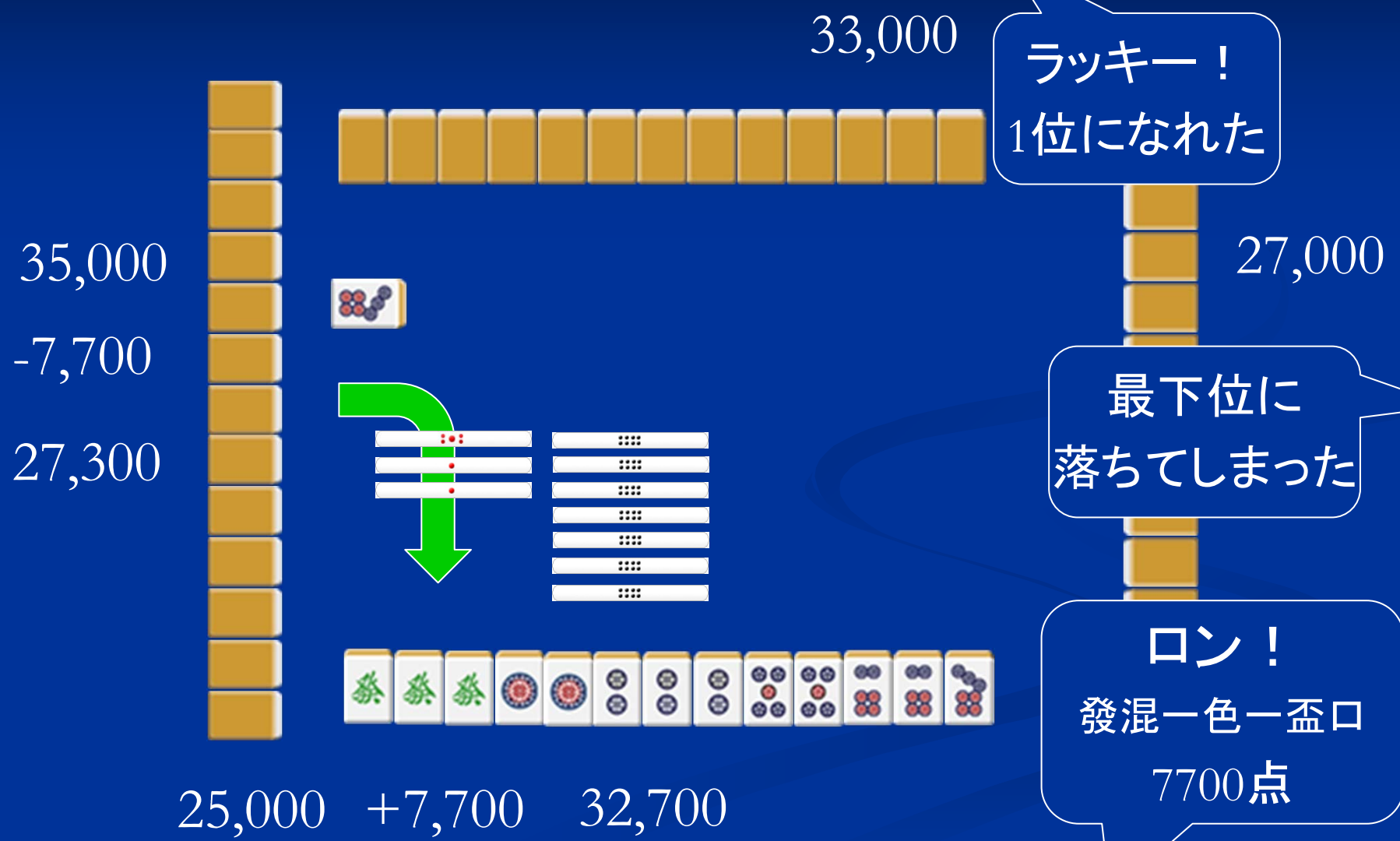
- 2人零和確定有限完全情報ゲーム
  - 零和: 自分が得点する = 相手から点を奪う

最善手: 自分にとって最大の利益が得られる手

零和なので最善手は自動的に  
相手にとって最も嫌な手になる

3人以上だと  
最大の利益が得られる手 = 最善手  
とは限らない

# 多人数ゲームの例：麻雀

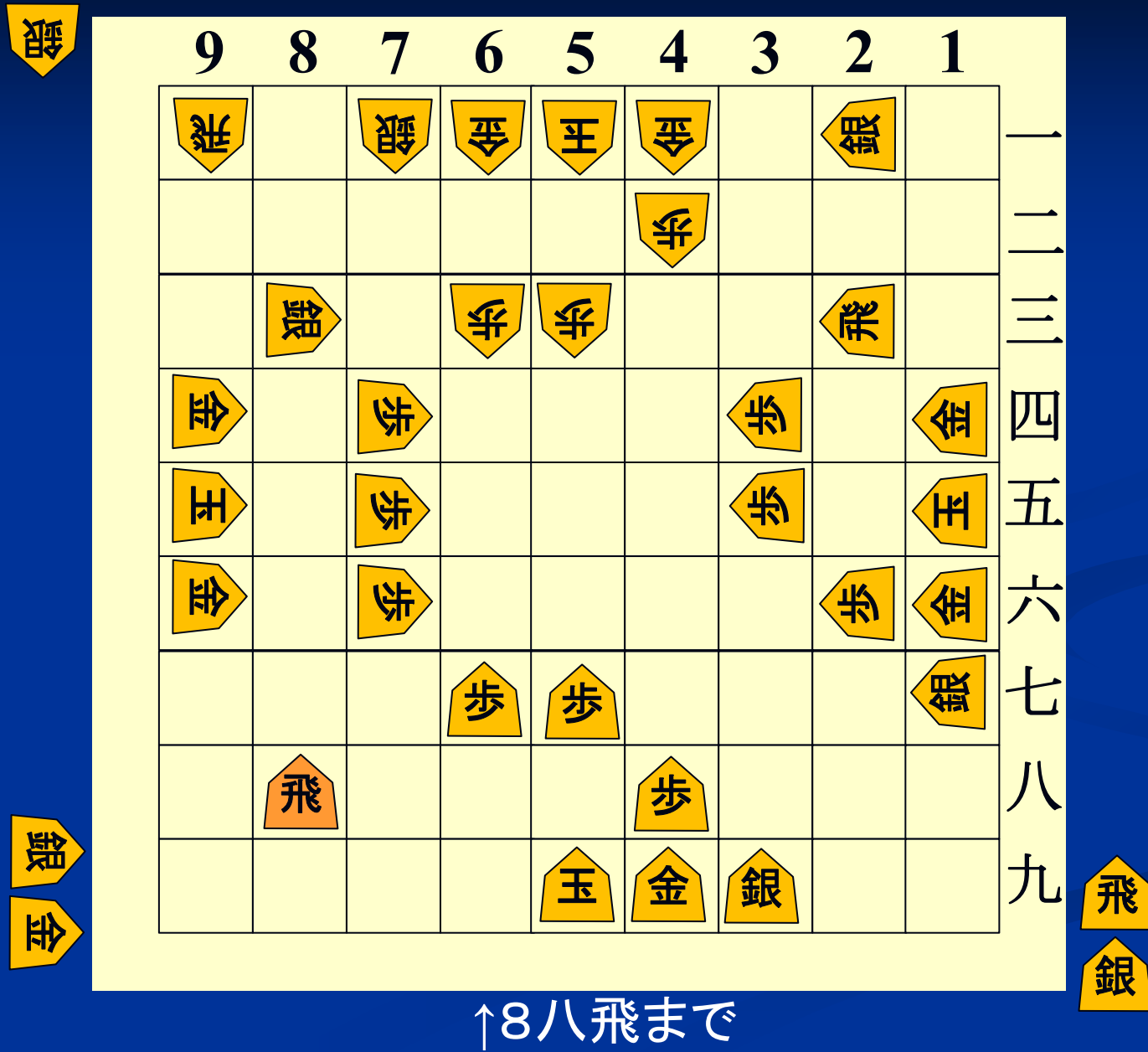


# 多人数ゲームの例：4人将棋

9	8	7	6	5	4	3	2	1	
		銀	金	王	金	銀			一
			歩	飛	歩				二
銀				歩				銀	三
金	歩						歩	金	四
玉	飛	歩				歩	飛	玉	五
金	歩						歩	金	六
銀				歩				銀	七
			歩	飛	歩				八
		銀	金	王	金	銀			九

時計回りに  
順番に指す

# 多人数ゲームの例：4人将棋





# 多人数ゲームの例：4人将棋



	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
一	飛		銀	金	王	金		銀		一
二						歩				二
三		銀		歩	歩			飛		三
四	金		歩				歩		金	四
五	王		歩				歩		王	五
六	金		歩					歩	金	六
七				歩	歩				銀	七
八		飛				歩				八
九			銀		王	金	銀			九

次に→6九金で  
↑玉が詰むぞ



→7九銀まで

# 多人数ゲームの例：4人将棋

→玉は  
詰み！



次に→6九金で  
詰むところだったのに  
ラッキー！

↓8四銀まで

銀

# 2人零和有限確定完全 情報ゲームの勝敗

- 2人零和確定有限完全情報ゲーム
  - 勝敗は試合開始時に確定している！

双方が最善手を指した場合、試合開始時にすでに  
先手必勝・後手必勝・引き分けのいずれかが確定

帰納的に証明できる

# 勝ちの局面・負けの局面



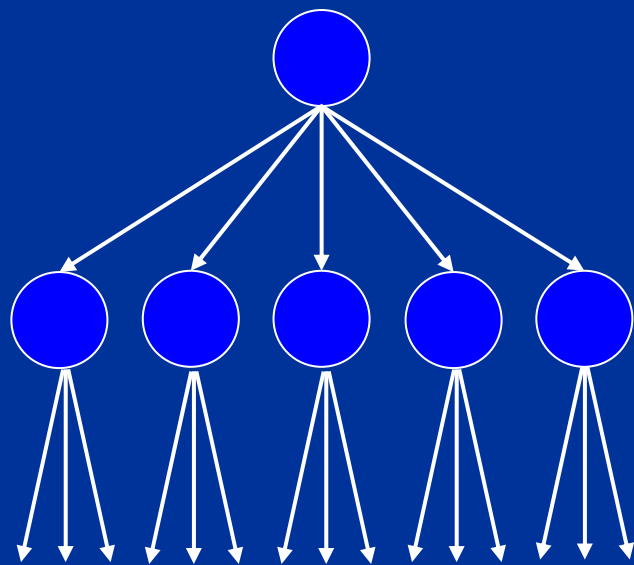
勝ち



負け

勝負の付いた局面

= 勝ちか負けか確定



試合中の局面は？

# 勝ちの局面・負けの局面

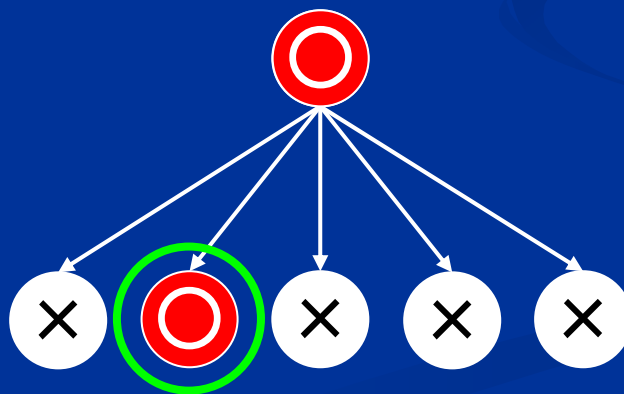
## 勝負の付く1手前の局面

合法手の中に1つでも「勝ちの局面」へ行く手がある

⇒その手を選べばいい



1手前の局面も勝ちの局面



# 勝ちの局面・負けの局面

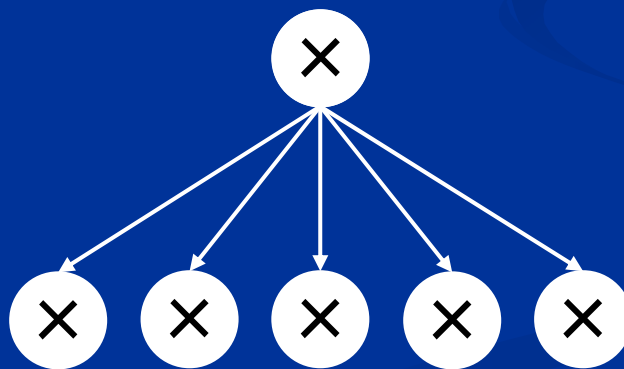
勝負の付く1手前の局面

全ての合法手が「負けの局面」へ行く手

⇒どの手を選んでも負け



1手前の局面も負けの局面

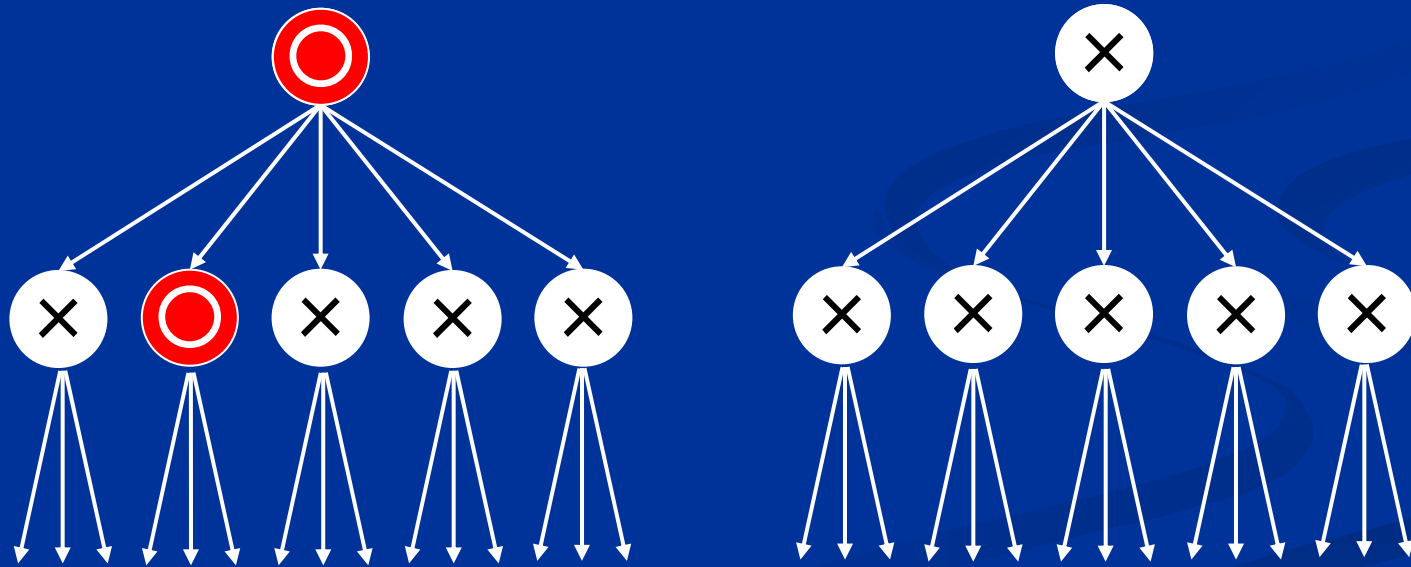


1手前の局面は勝ちか負けかが決定

# 勝ちの局面・負けの局面

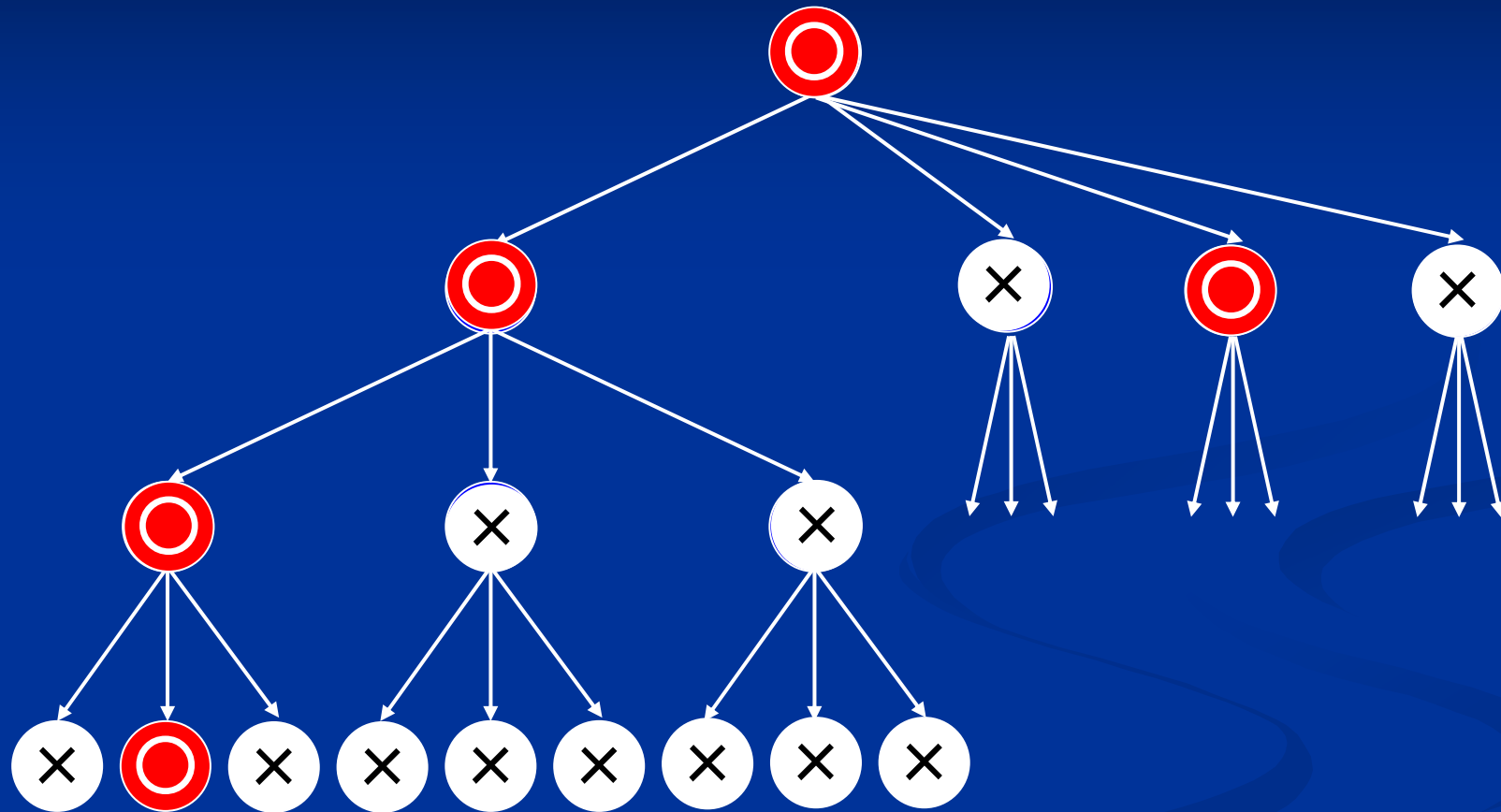
勝負の付く2手前の局面

勝ちの局面へ行く手がある⇒その局面も勝ちの局面  
負けの局面へ行く手のみ ⇒その局面も負けの局面



2手前の局面も勝ちか負けかが決定

# 勝ちの局面・負けの局面



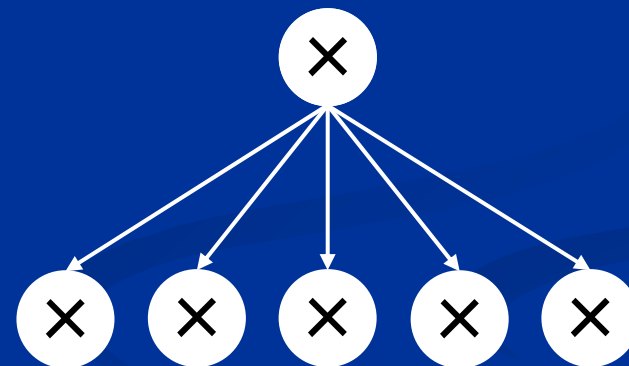
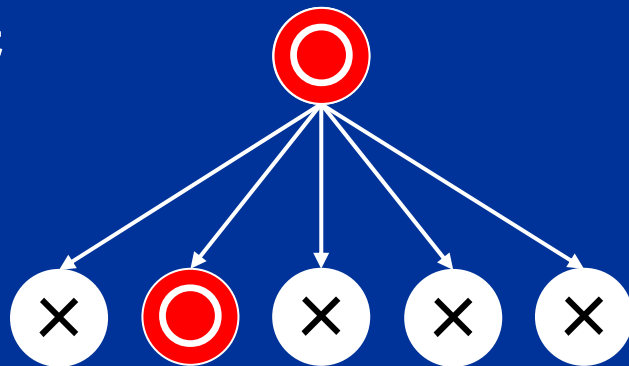
勝負の付いた局面から順に遡っていく  
⇒初期局面まで遡れる



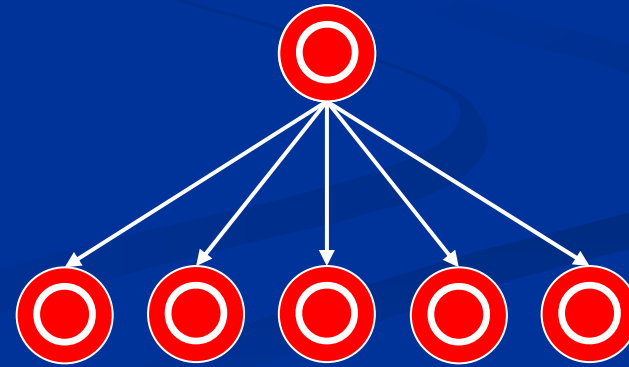
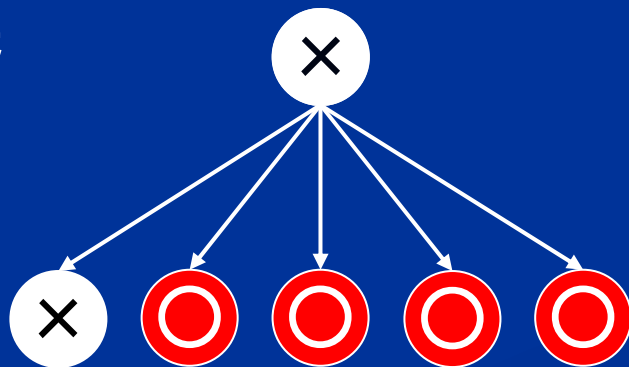
# 勝ちの局面・負けの局面

- 手番は交互に来る
- 各プレイヤーは自分の手番で最善手を選択する  
⇒手番毎に立場を入れ替える

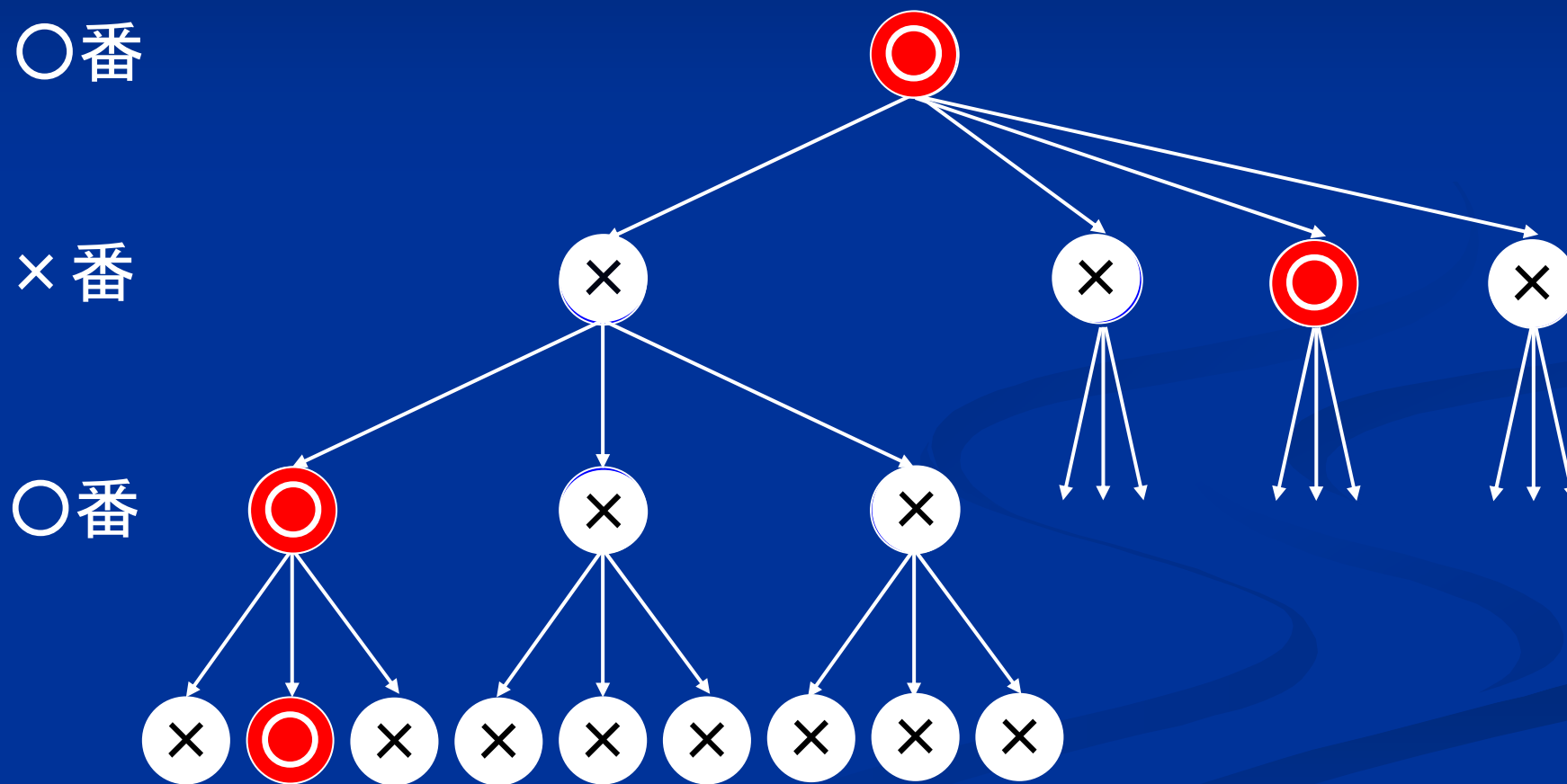
○番



×番



# 勝ちの局面・負けの局面



やはり初期局面まで遡れる

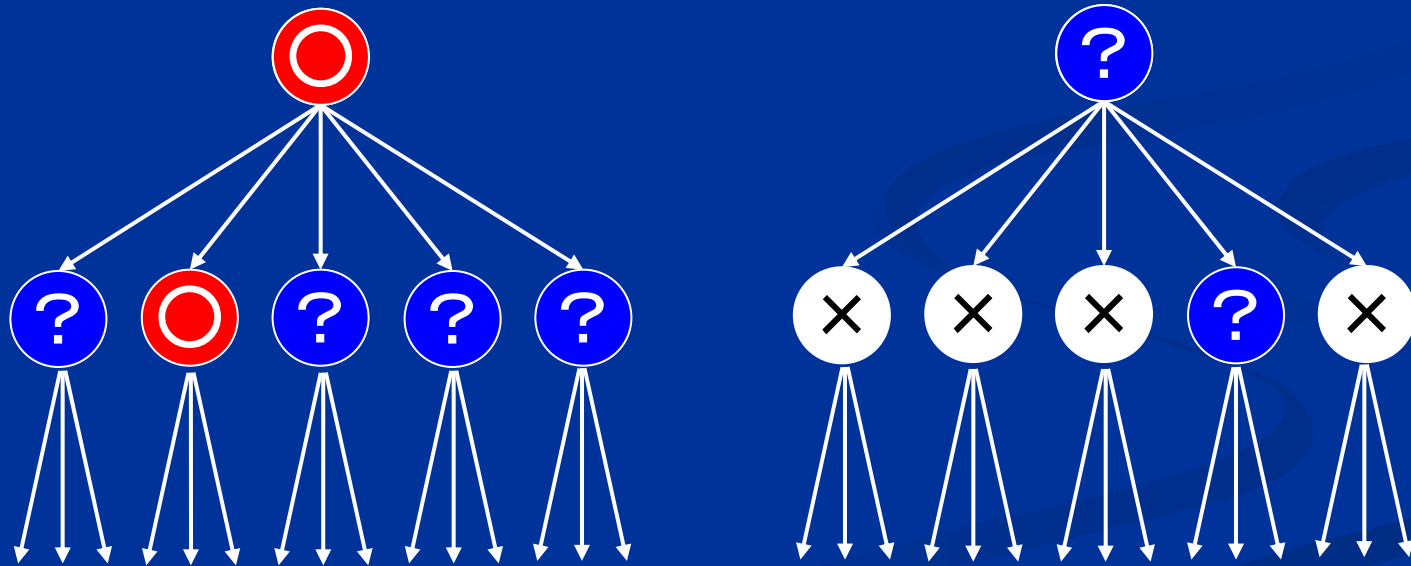
# 勝ちの局面・負けの局面

勝ちの局面へ行く手がある

⇒勝ち

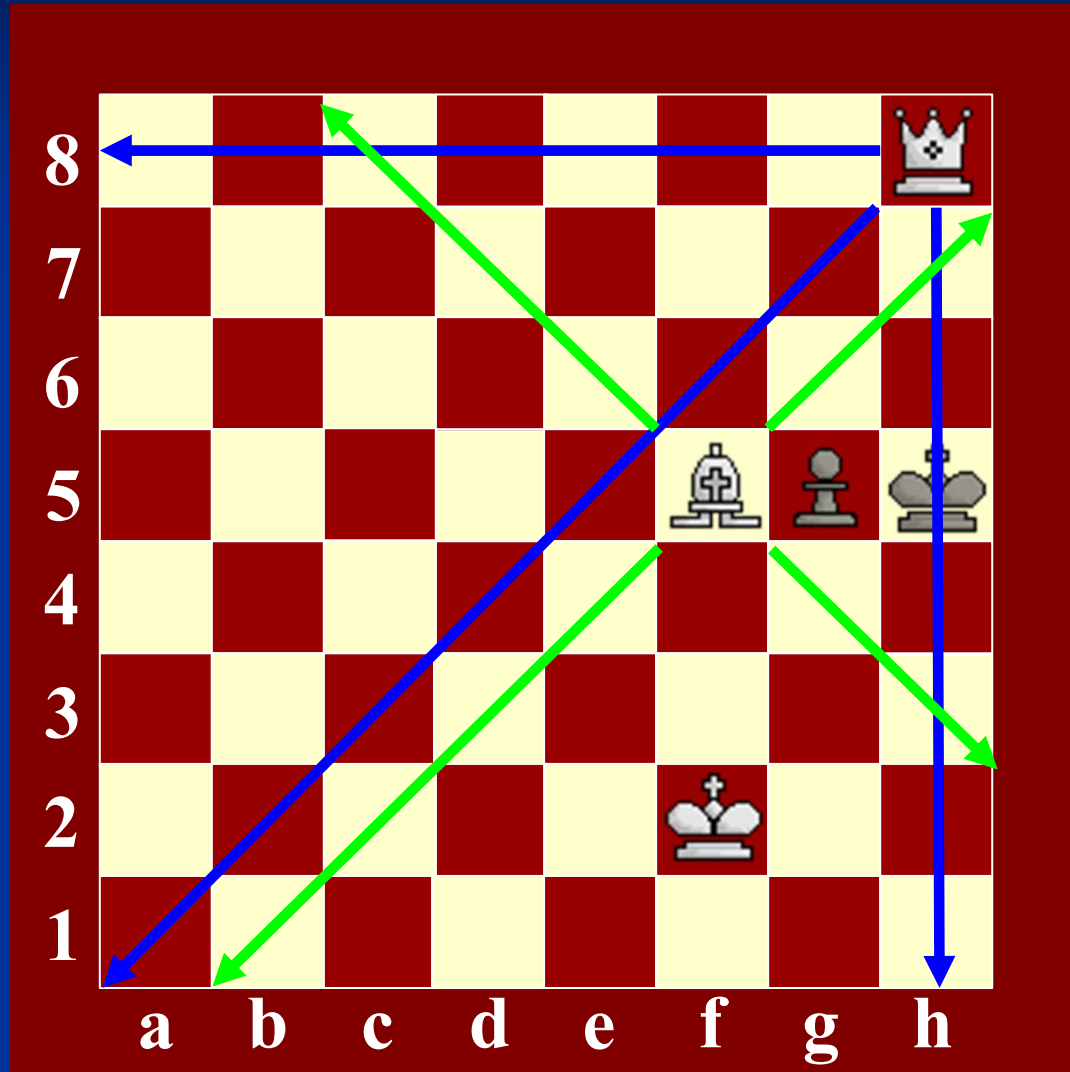
負け以外の局面へ行く手がある

⇒負けかどうかは不明



勝ちには1つでもあればOK 負けは全て負けのみ確定

# 勝ちの局面: チェス



黒番

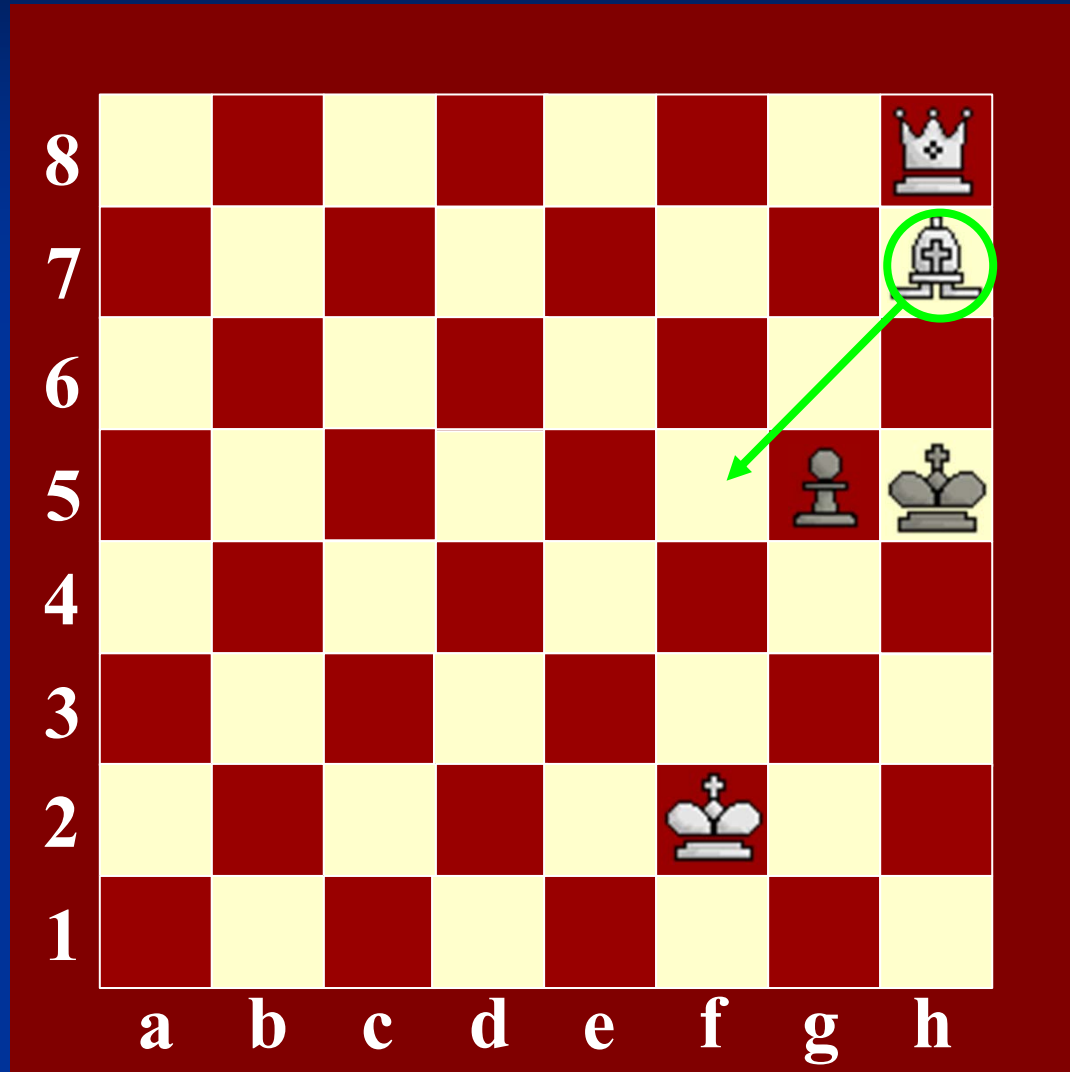
黒はチェックが  
かかっているが...

逃げ場無し!  
チェックメイト!

この局面は白勝ち

1.Qh8, Kh5 2.Bf5# まで

# 勝ちの局面: チェス



白番

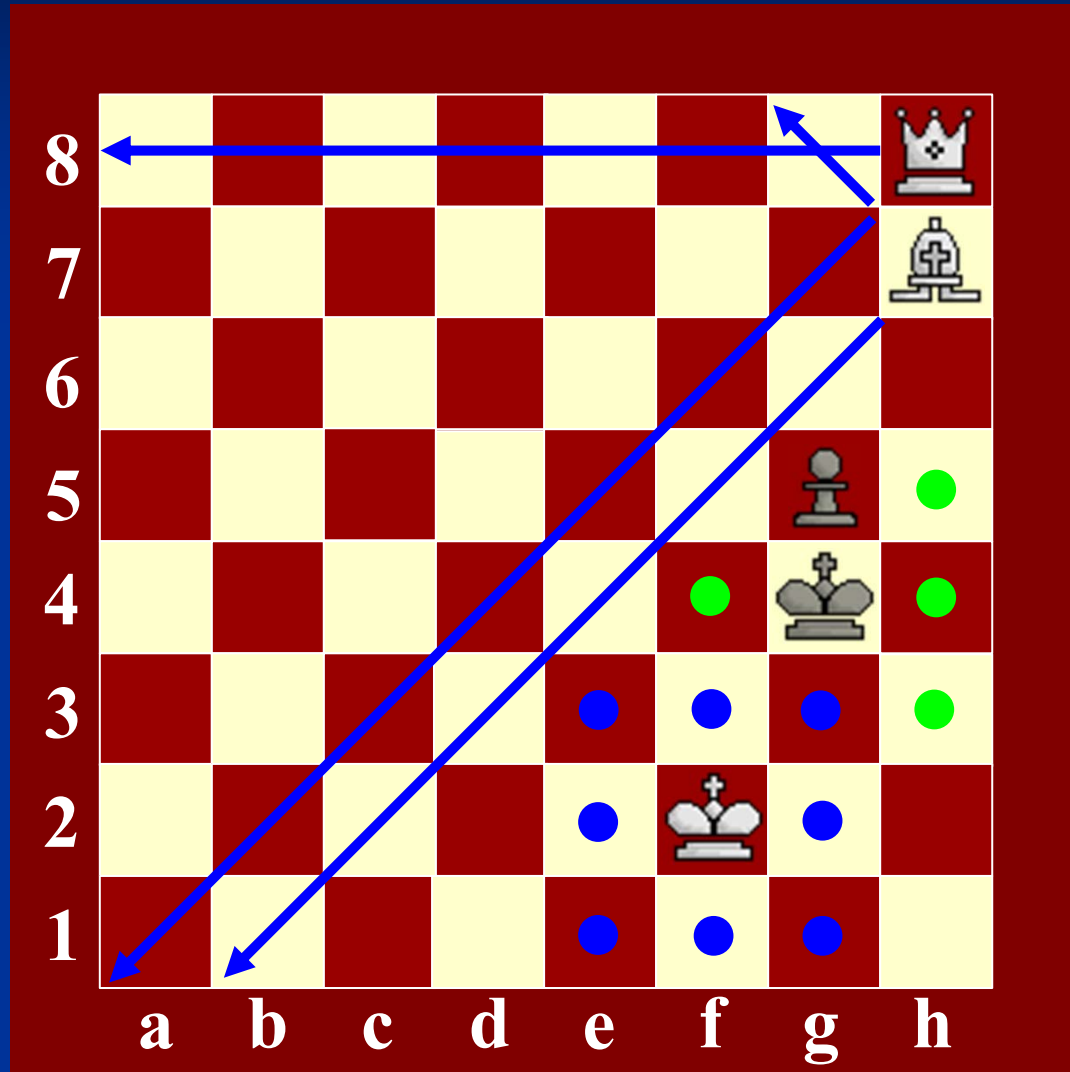
白は様々な手を  
指せるが...

白はビショップを  
f4 に動かせば  
チェックメイト

この局面も白勝ち

1.Qh8, Kh5 まで

# 手の選択

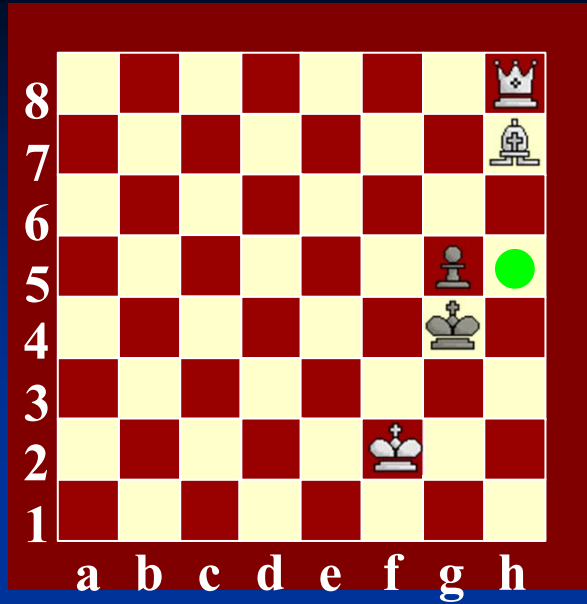


1.Qh8 まで

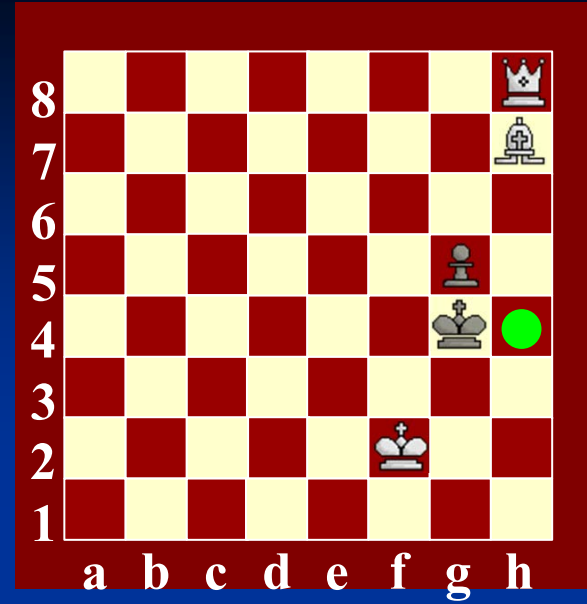
黒番

黒が指せる手は  
Kh5, Kh4, Kh3, Kf4 の  
4通り

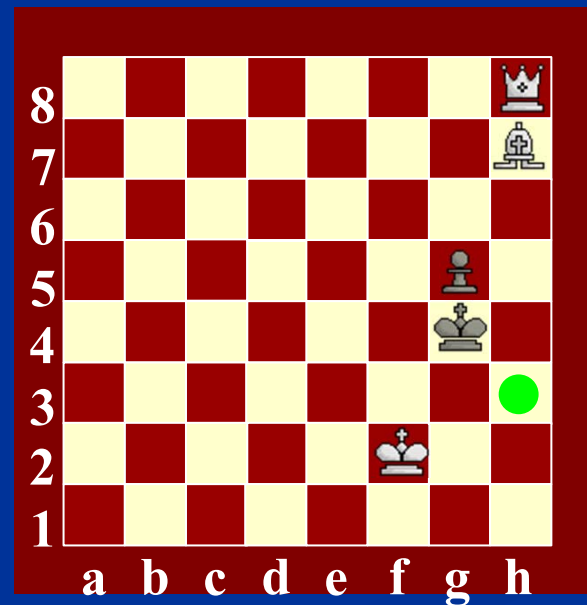
どの手を指す？



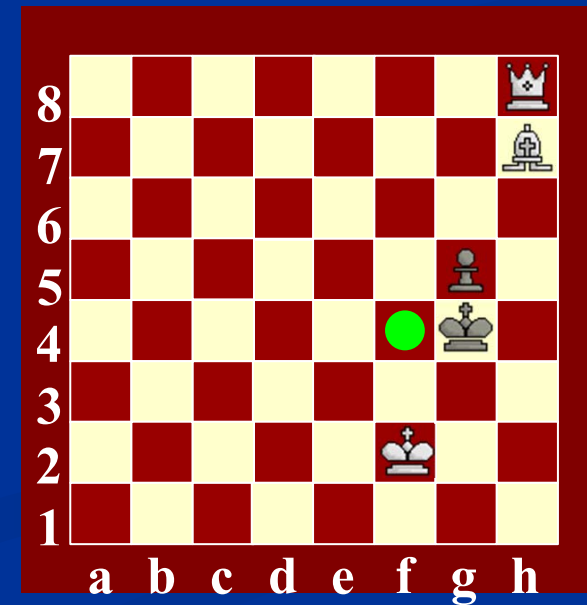
1.Qh8



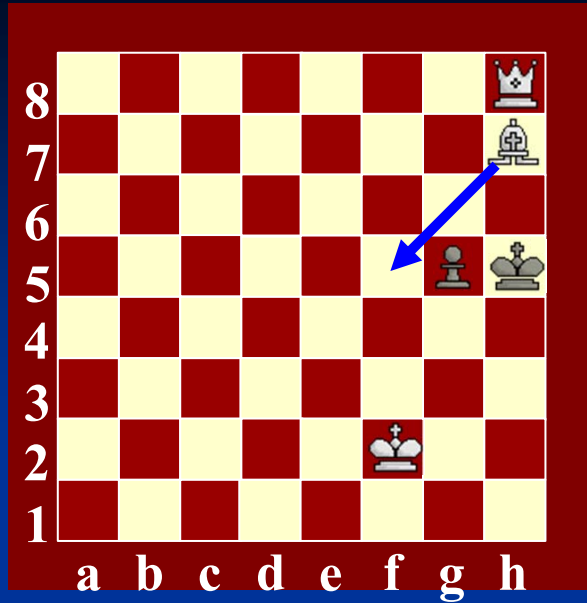
1.Qh8



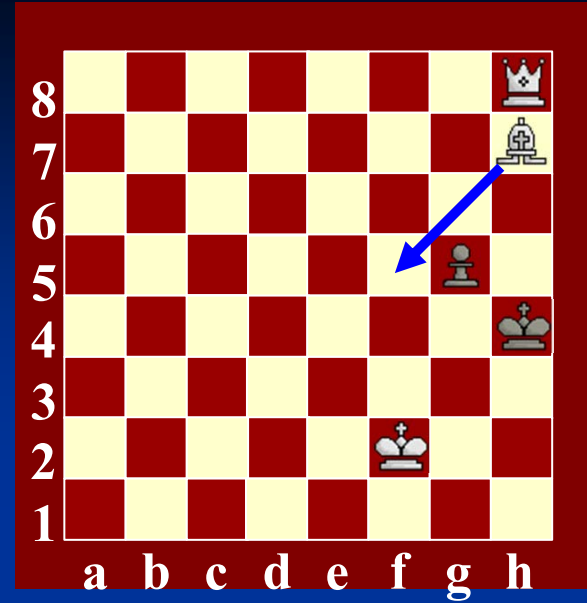
1.Qh8



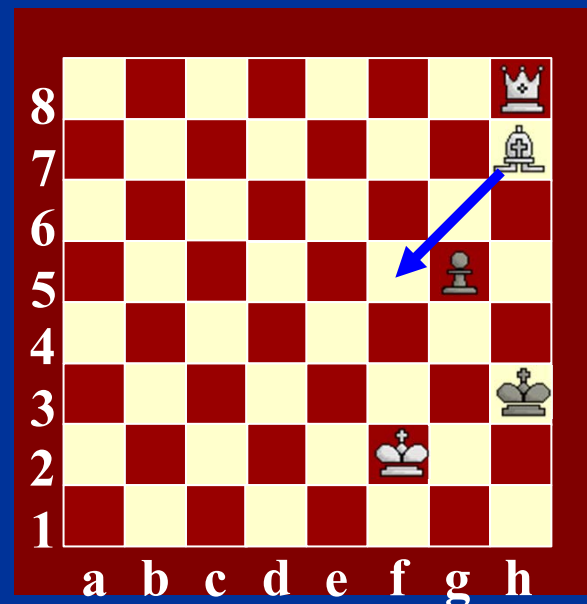
1.Qh8



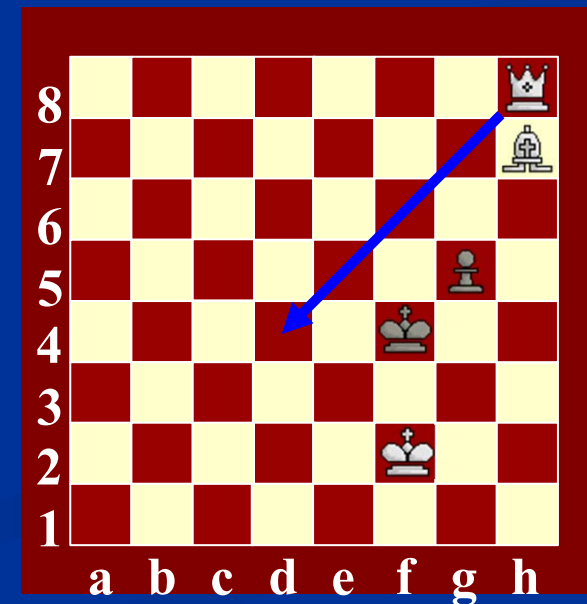
1.Qh8, Kg5



1.Qh8, Kg4



1.Qh8, Kg3



1.Qh8, Ke4

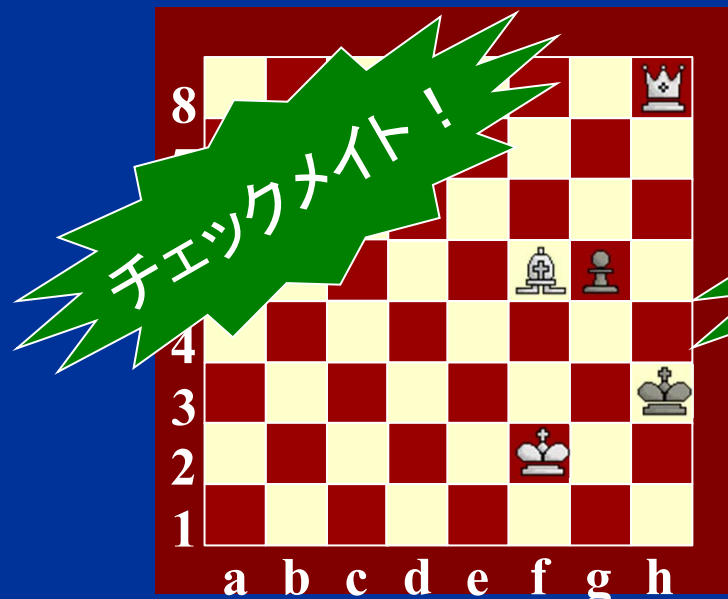




1.Qh8, Kh5 2.Bf5#



1.Qh8, Kh4 2.Bf5#

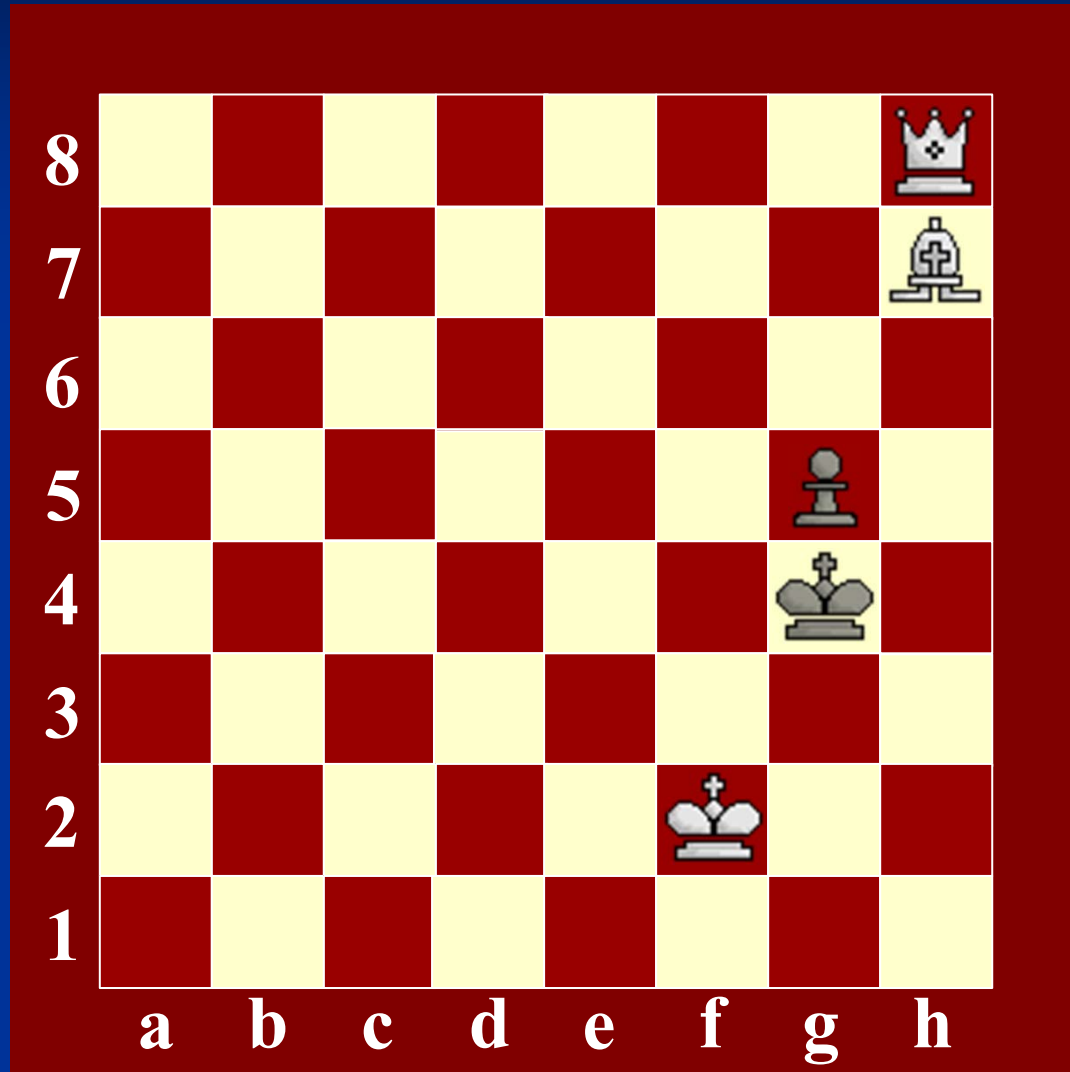


1.Qh8, Kh3 2.Bf5#



1.Qh8, Kf4 2.Qd4#

# 勝ちの局面: チェス



1.Qh8 まで

黒番

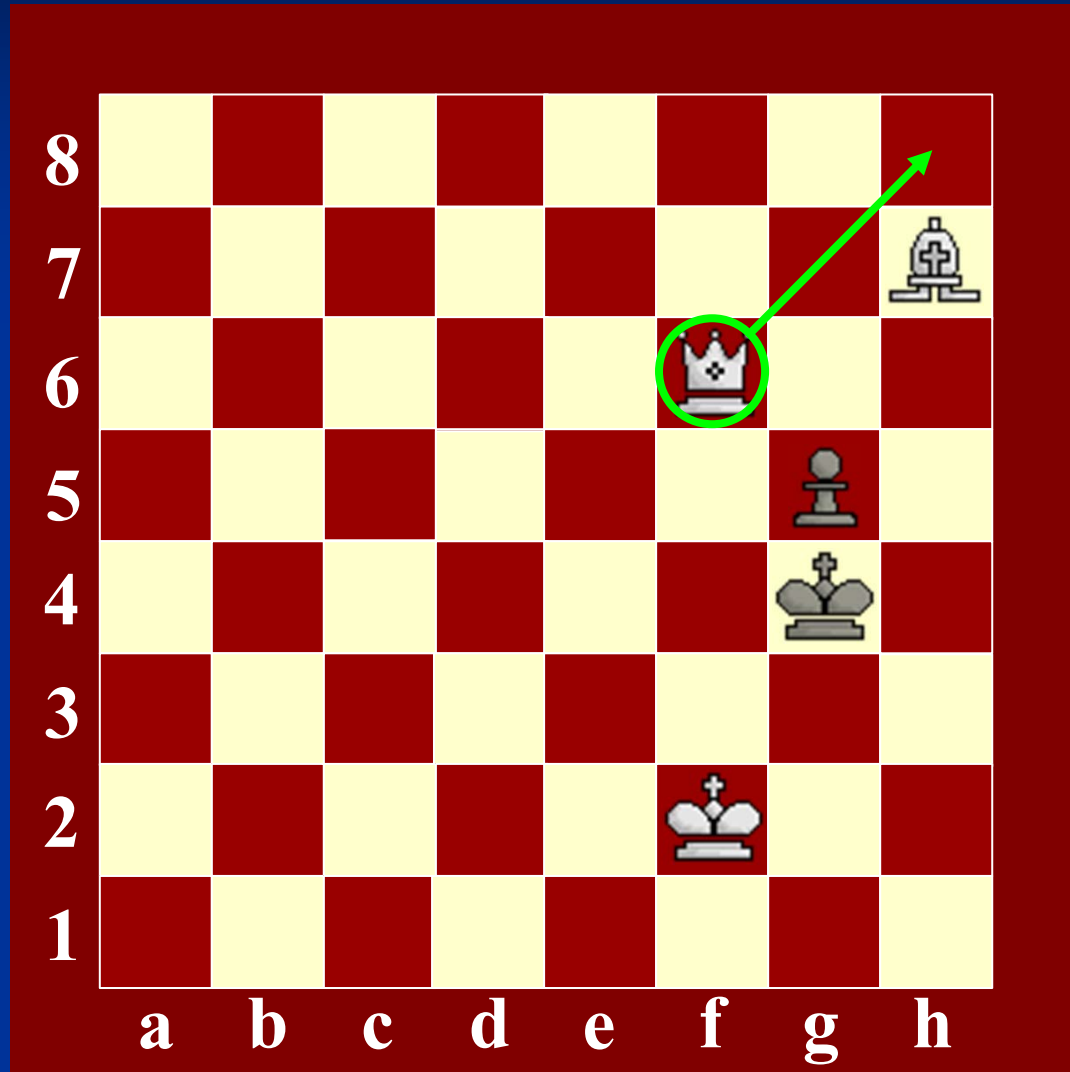
黒が指せる手は

Kh5, Kh4, Kh3, Kf4 の  
4通り

どの手を差しても  
チェックメイト!

この局面も白勝ち

# 勝ちの局面: チェス



白番

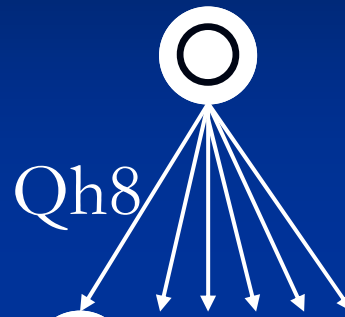
白は様々な手を  
指せるが...

白はクイーンを  
h8 に動かせば  
1手後にチェックメイト

この局面も白勝ち

# 勝ちの局面: チェス

白番



黒番



Kh5

Kh4

Kh3

Kf4

白番



Bf5

Bf5

Bf5

Qd4



黒番

# 引き分けがある場合

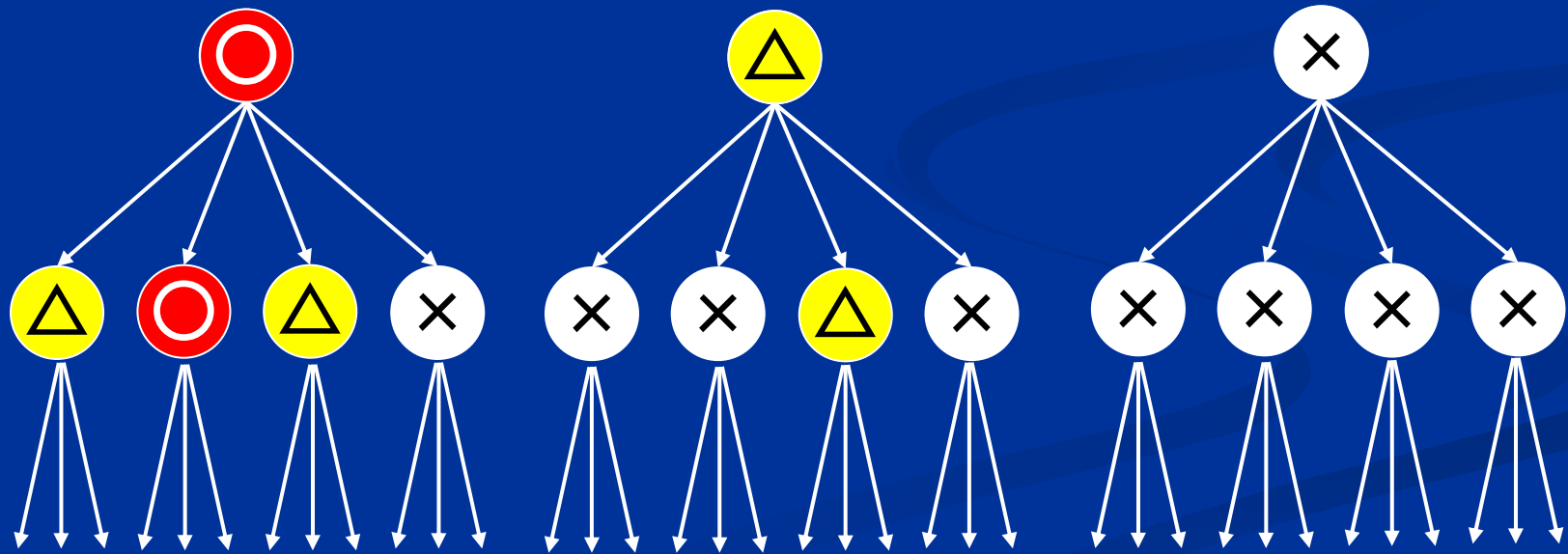
勝ちの局面へ行く手がある

⇒勝ち

勝ちが無いが引き分けの局面へ行く手がある⇒引き分け

負けの局面へ行く手のみ

⇒負け





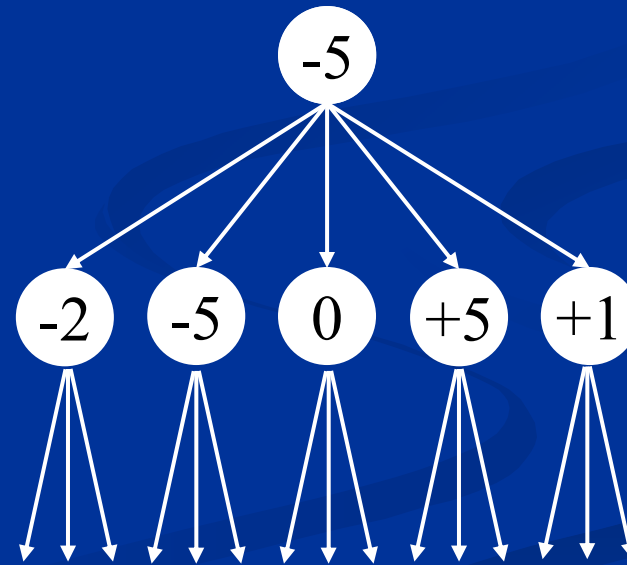
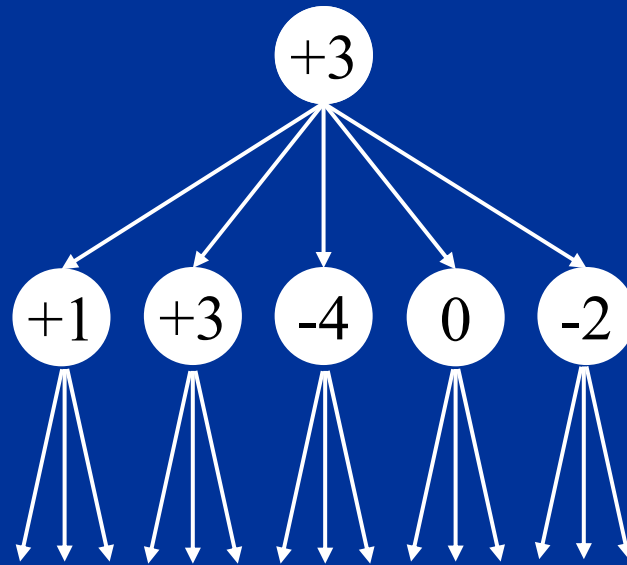
# 得点がある場合

○番: 最大値を選択

×番: 最小値を選択

○番

×番

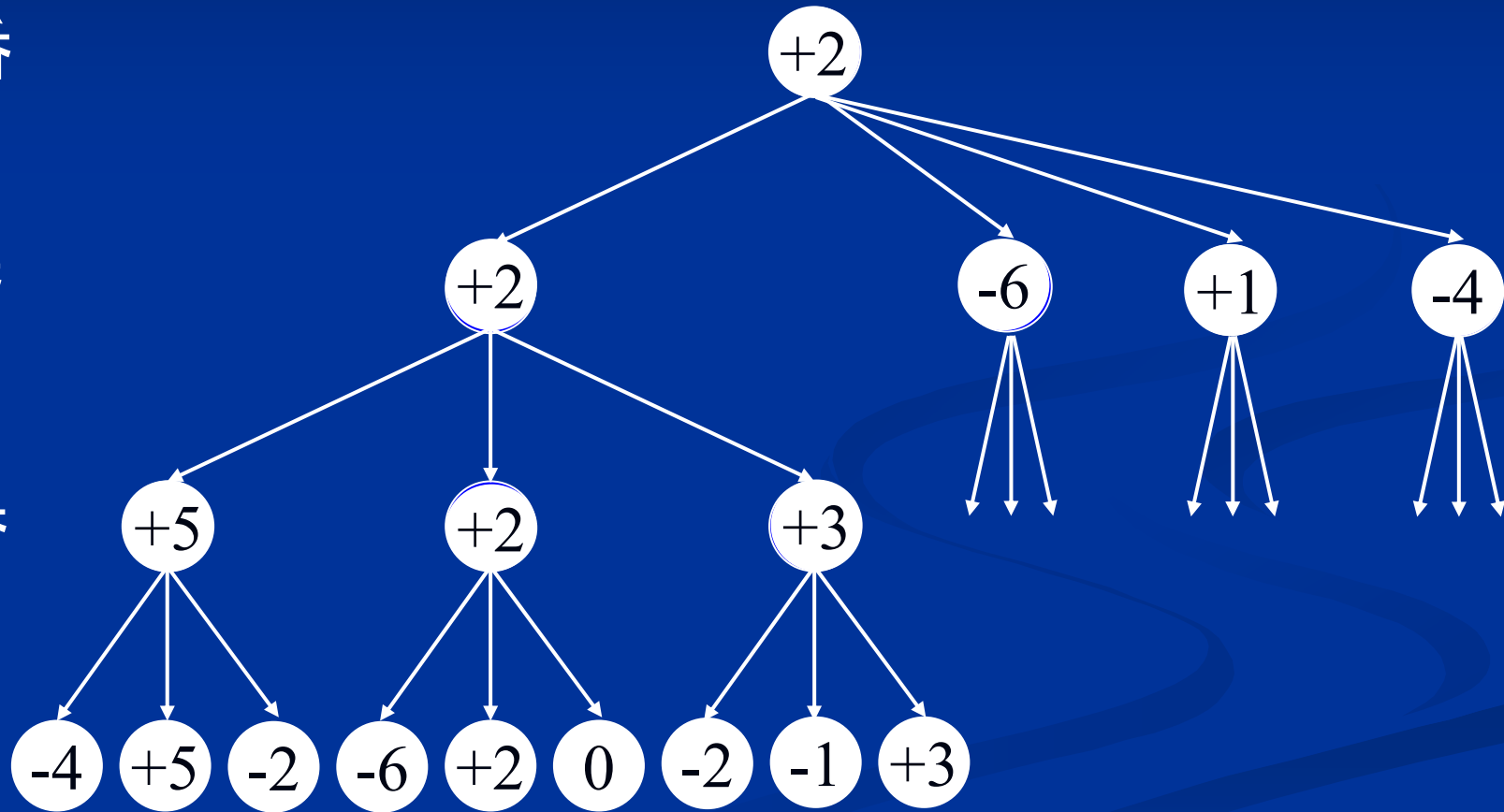


# 得点がある場合

○番

×番

○番





# 2人零和有限確定完全 情報ゲームの勝敗

- 2人零和確定有限完全情報ゲーム
  - 勝敗は試合開始時に確定している

双方が最善手を指した場合、試合開始時にすでに  
先手必勝・後手必勝・引き分けのいずれかが確定

しかし実際のゲームでどちらが勝つかは別問題

探索空間のサイズが膨大

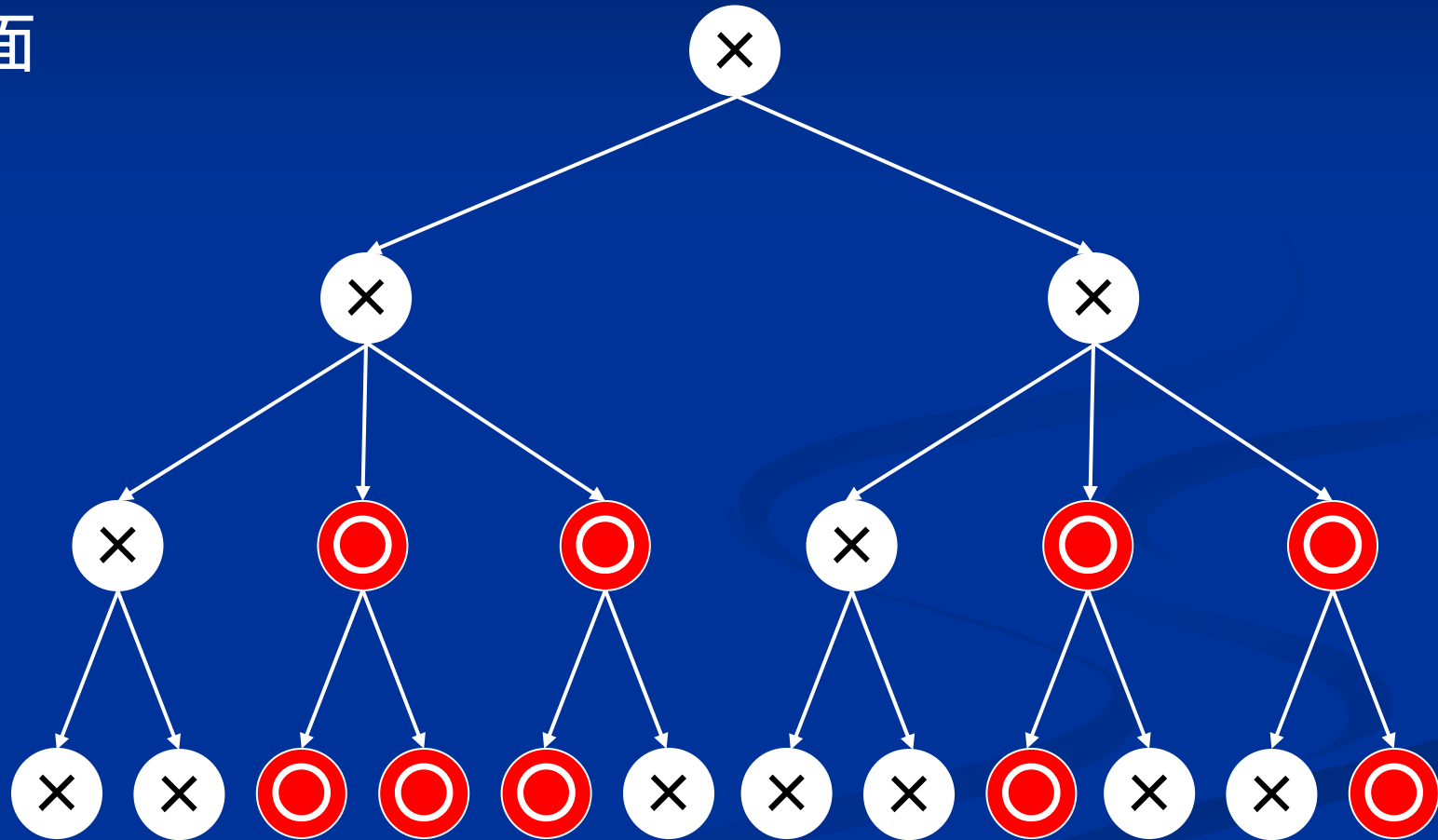
# 可能な局面数

初期局面

1手先

2手先

3手先



手番が先に進むにつれ可能な局面数は指数的に増える

# 可能な局面数

		各局面での合法手数		
		2	4	8
終局までの 手数	10	1,000	1,000,000	$10^9$
	20	1,000,000	$10^{12}$	$10^{18}$
	30	$10^9$	$10^{18}$	$10^{27}$
	40	$10^{12}$	$10^{24}$	$10^{36}$
	50	$10^{15}$	$10^{30}$	$10^{45}$

終局までの手数が増えると局面数は指数的に増える

# 可能な局面数

ゲーム	可能な局面数
チェッカー	$10^{30}$
リバーシ	$10^{60}$
チェス	$10^{120}$
将棋	$10^{226}$
囲碁	$10^{360}$

地球全体の原子の数  $10^{50}$  個

⇒地球を全てを使っても全局面を列挙するのは不可能

# 可能な局面数

## ■ 将棋

- 終局までの平均手数: 115手

- 各局面での合法手数: 80通り

⇒可能な局面数は  $80^{115} = 10^{226}$  通り

ただし手順前後で同一となる局面を1つと数えると  
可能な局面数は  $10^{68} \sim 10^{69}$ 通りとなる[1]

[1]篠田 正人, 将棋における実現可能局面数について,  
IP SJ Symposium Series Vol.2008 No.11, (2008), pp.116-119,  
<http://www.nara-wu.ac.jp/math/personal/shinoda/legal.pdf>

# ゲームの分類：手番

## ■ 順次型

- 手番が順番に回ってくる

## ■ 同時型

- 各プレイヤーが同時に着手する
  - 多くの場合出し遅れは負け
- 相手に見えない状態で着手を決定後、同時に公開

## ■ 反射型

- 先に着手したプレイヤーのみ有効

順次型は理論的には初期で勝敗が確定  
同時型の場合は？

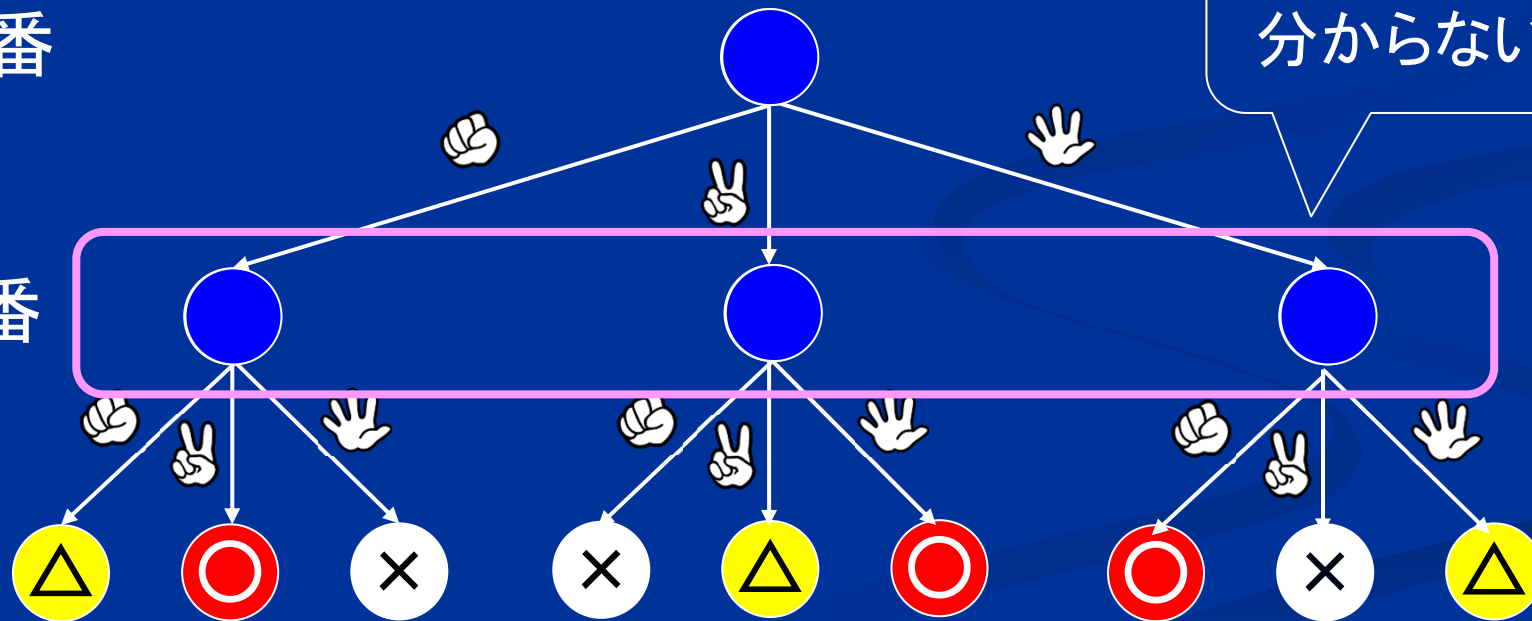
# 同時型ゲーム

双方が同時に手を決定する  
⇒相手の手の情報は使えない

じゃんけんの場合

○番

×番




同時型では木は使えない

# 同時型ゲーム

順序型ゲームの局面：木を構成

同時型ゲームの局面：表を構成

		○番の手		
				
×番の手		△	×	○
		○	△	×
		×	○	△



# 同時型ゲームの勝敗

同時型ゲームで勝敗が確定できる場合がある

×が何を選んでも  
Cを選べば○の勝ち

× \ ○	A	B	C	D	E
a	○	△	○	×	×
b	×	△	○	×	×
c	○	×	○	△	×
d	○	○	○	○	○
e	△	×	○	△	×

○が何を選んでも  
dを選ぶと×の負け

この局面は  
○の勝ち

# 同時型ゲームの勝敗

$\times$ $\circ$	A	B	C	D	E
a	$\circ$	$\triangle$	$\circ$	$\times$	$\triangle$
b	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
c	$\circ$	$\triangle$	$\circ$	$\circ$	$\times$
d	$\circ$	$\circ$	$\times$	$\circ$	$\circ$
e	$\triangle$	$\times$	$\circ$	$\triangle$	$\times$

$\circ$ が何を選んでも  
dを選ぶと $\times$ の勝ち

この局面は  
 $\times$ の勝ち

# 同時型ゲームの勝敗

双方5つ選択肢があるが...

×がd以外を選べば  
Bを選ぶと○の負け

Eを選ぶと○の負け

× ○	A	B	C	D	E
a	△	×	○	×	×
b	○	×	○	○	×
c	○	×	×	△	×
d	○	○	○	○	×
e	×	×	△	○	×

Eは選ばない

○がE以外を選べば  
dを選ぶと×の負け

dは選ばない

# 同時型ゲームの勝敗

双方5つ選択肢があるが  
実質的な選択肢は3通り

$\times$ $\circ$	A	C	D
a	$\triangle$	$\circ$	$\times$
c	$\circ$	$\times$	$\triangle$
e	$\times$	$\triangle$	$\circ$

$\circ$ が選ぶべきは A,C,D のどれか  
 $\times$ が選ぶべきは a,c,e のどれか

# 得点がある場合

双方が最も得点が高くなるように選ぶには？

×	○	A	B	C
a		-2	+10	+4
b		+1	+5	+3
c		-5	-2	-10

×が a を選ぶなら  
○は B を選ぶべき

×が b を選ぶなら  
○は B を選ぶべき

×が c を選ぶなら  
○は B を選ぶべき

×の手に関係なく○は B を選ぶべき

# 得点がある場合

双方が最も得点が高くなるように選ぶには？

$\times$	$\circ$	A	B	C
a		-2	+10	+4
b		+1	+5	+3
c		-5	-2	-10

$\circ$ の手に関係なく  
 $\times$ は c を選ぶべき

$\circ$ が A を選ぶなら  
 $\times$ は c を選ぶべき

$\circ$ が B を選ぶなら  
 $\times$ は c を選ぶべき

$\circ$ が C を選ぶなら  
 $\times$ は c を選ぶべき

# 得点がある場合

双方が最も得点が高くなるように選ぶには？

×	○	A	B	C
a	-2	+10	+4	
b	+1	+5	+3	
c	-5	-2	-10	

○ : -2点

× : +2点

○は B を選択  
×は c を選択

この局面は × の 2点勝ち

# 得点がある場合

相手が何を選んでも  
他の選択肢に勝る選択肢があれば  
それを選択する

×が何を選んでも  
Cを選べば  
一番点が高くなる

× \ ○	A	B	C	D	E
a	0	+4	+5	-4	+2
b	-5	+5	+10	0	+4
c	-3	+2	+3	-5	0
d	-7	-4	+1	-10	-5
e	-2	-3	+2	0	-1

○が何を選んでも  
dを選べば  
一番点が低くなる

○は C を選択  
×は d を選択

この局面は○の1点勝ち



# 得点がある場合

選んではいけない選択肢がある場合もある

$\times$	$\circ$	A	B	C
a		-10	+5	+1
b		-6	-2	-3
c		-4	+6	+10

$\times$ が a のとき  
 $B > C > A$

$\times$ が b のとき  
 $B > C > A$

$\times$ が c のとき  
 $C > B > A$

選択肢Aは常に最下位  
=Aは選んではいけない

# 得点がある場合

選んではいけない選択肢がある場合もある

$\times$	$\circ$	A	B	C
a		-10	+5	+1
b		-6	-2	-3
c		-4	+6	+10

選択肢 c は常に最下位  
c を選んではいけない

○が A のとき  
 $a < b < c$

○が B のとき  
 $b < a < c$

○が C のとき  
 $b < a < c$

# 得点がある場合

選んではいけない選択肢がある場合もある

$\times$	$\circ$	A	B	C
a		-10	+5	+1
b		-6	-2	-3
c		-4	+6	+10

$\circ$ は A を選ばない  
 $\times$ は c を選ばない

$\circ$ は B を選択  
 $\times$ は b を選択

この局面は  $\times$  の2点勝ち

# 得点がある場合

相手が何を選んでも  
他の選択肢に劣る選択肢があれば  
それを削除する

$\times$	$\circ$	A	B	C	D	E
a		-2	+4	+3	-4	+2
b		0	+5	+7	-8	+4
c		-3	+3	+2	-10	0
d		+7	+8	+10	0	+5
e		-5	+1	-2	-7	-1

$\times$ が何を選んでも  
Dを選べば  
一番点が低くなる

Dは選ばない

$\circ$ が何を選んでも  
dを選べば  
一番点が高くなる

dは選ばない

# 得点がある場合

相手が何を選んでも  
他の選択肢に劣る選択肢があれば  
それを削除する

×がd以外を選ぶと  
Aを選べば  
一番点が低くなる

×	○	A	B	C	D	E
a		-2	+4	+3	-4	+2
b		0	+5	+7	-8	+4
c		-3	+3	+2	-10	0
d		+7	+8	+10	0	+5
e		-5	+1	-2	-7	-1

Aは選ばない

○がD以外を選ぶと  
bを選べば  
一番点が高くなる

bは選ばない

# 得点がある場合

相手が何を選んでも  
他の選択肢に劣る選択肢があれば  
それを削除する

×がbd以外を選ぶと  
Bを選べば  
一番点が高くなる

×	○	A	B	C	D	E
a		-2	+4	+3	-4	+2
b		0	+5	+7	-8	+4
c		-3	+3	+2	-10	0
d		+7	+8	+10	0	+5
e		-5	+1	-2	-7	-1

B を選ぶ

○がAD以外を選ぶと  
eを選べば  
一番点が低くなる

e を選ぶ

# 得点がある場合

相手が何を選んでも  
他の選択肢に劣る選択肢があれば  
それを削除する

×	○	A	B	C	D	E
a		-2	+4	+3	-4	+2
b		0	+5	+7	-8	+4
c		-3	+3	+2	-10	0
d		+7	+8	+10	0	+5
e		-5	+1	-2	-7	-1

○は B を選択  
×は e を選択

この局面は○の1点勝ち

# 得点がある場合

特に優れた選択肢も劣る選択肢も無い場合

$\times$ ○	A	B	C
a	-5	+5	+2
b	+2	0	-1
c	-4	-5	+5

$\times$ が a を選ぶとき  
 $B > C > A$

$\times$ が b を選ぶとき  
 $A > B > C$

$\times$ が c を選ぶとき  
 $C > A > B$

○は選んではいけない選択肢が無い  
 $\times$ も選んではいけない選択肢が無い

この局面の勝敗は不明



# 得点がある場合

×が何を選んでも

$$B > A$$

×が何を選んでも

$$C > D$$

×	○	A	B	C	D
a		+2	+4	-4	-8
b		+3	+6	-3	-4
c		-8	-3	+10	+5
d		-10	-5	+6	+3

○が何を選んでも

$$a < b$$

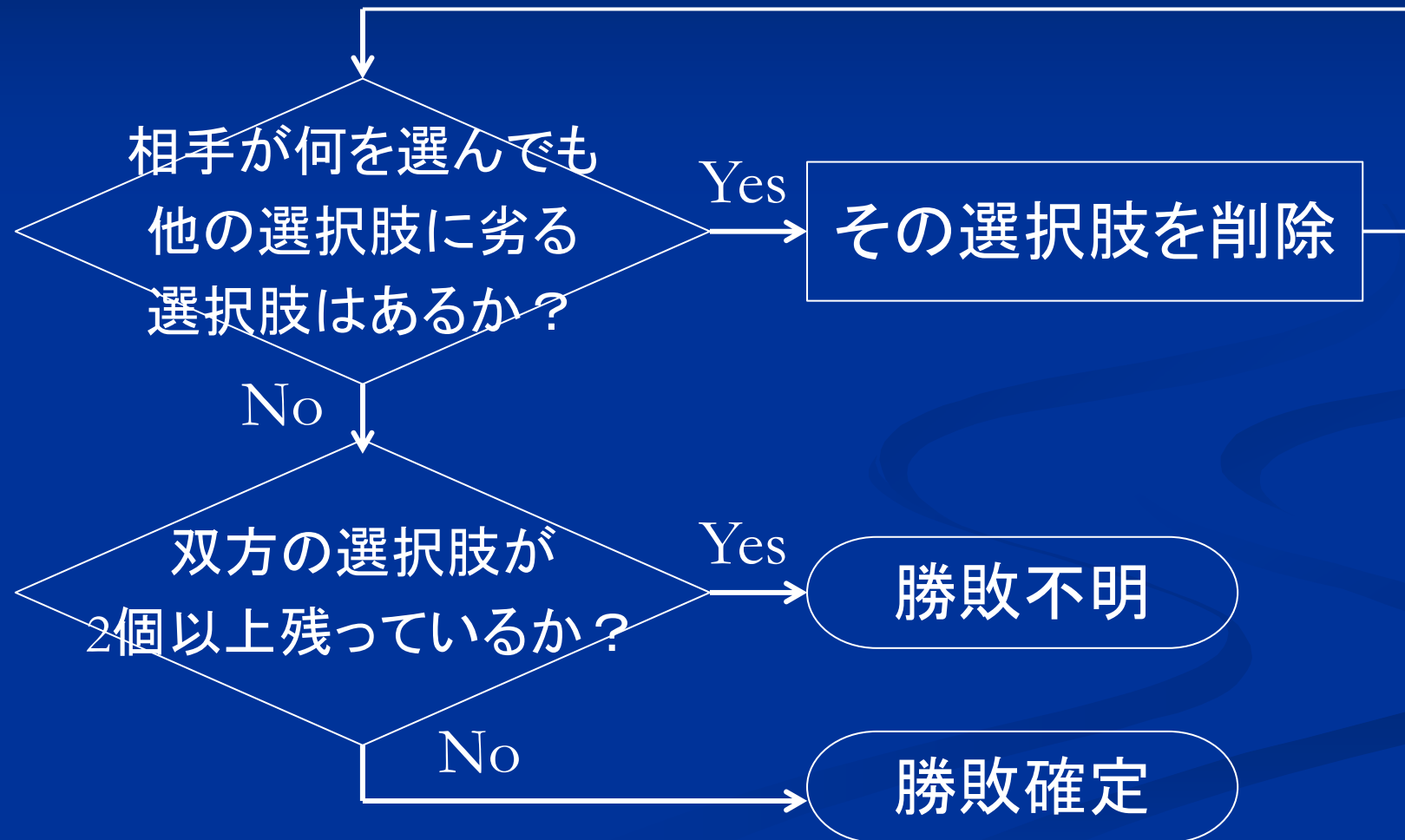
○が何を選んでも

$$d < c$$

○は B か C を選ぶべき

×は a か d を選ぶべき

# 同時型ゲームの解析フローチャート

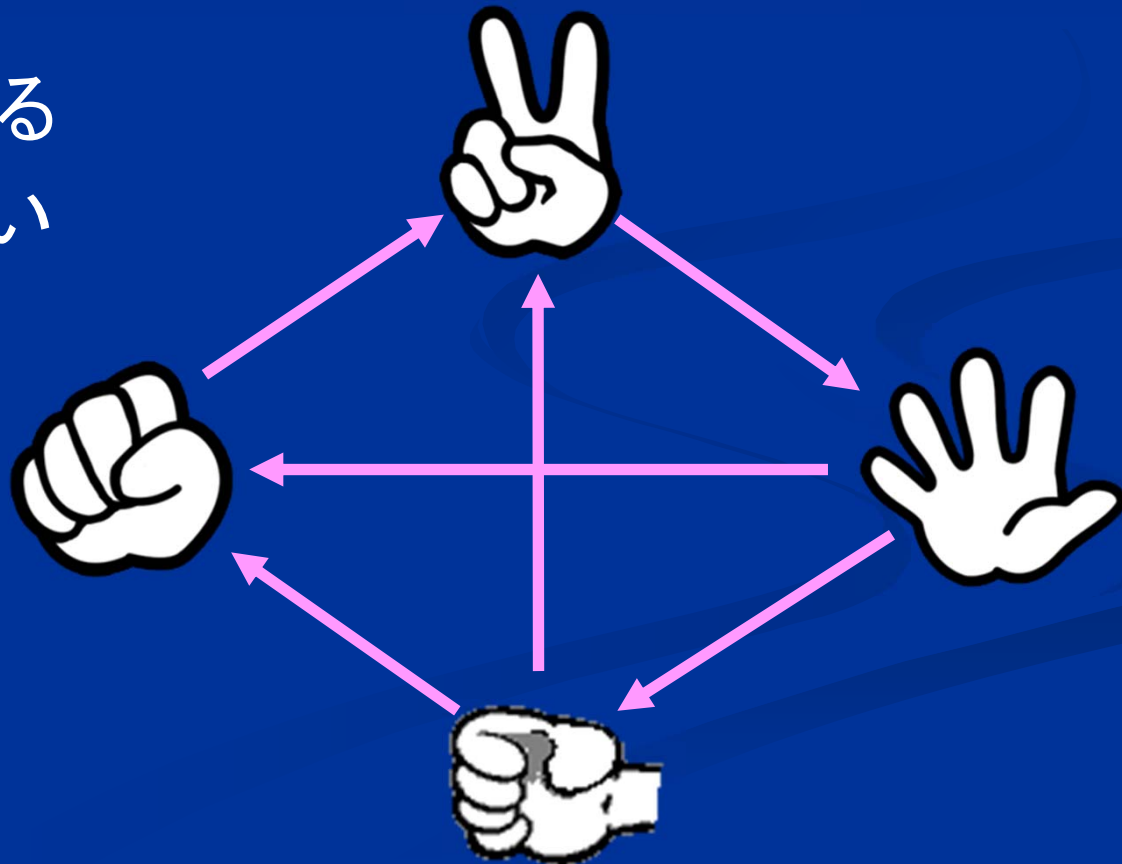


# フランスのジャンケン

- フランスのジャンケン
  - 石・鋏・紙の他に壺を出せる



石は壺の中に入る  
鋏で壺は切れない  
紙は壺を包める



# フランスのジャンケン

		○番の手			
					
×番の手		△	×	○	○
		○	△	×	○
		×	○	△	×
		×	×	○	△

# 宿題：フランスのじゃんけん

- 他の選択肢に劣る選択肢はあるか？

		○番の手			
					
×番の手		△	×	○	○
		○	△	×	○
		×	○	△	×
		×	×	○	△

# 宿題:3目並べの局面

- この局面の勝敗は？

×番

7 ○	8 ×	9
4 ×	5	6
1 ○	2	3 ○

7 ○	8 ×	9
4 ×	5	6
1 ○	2	3 ○

×番



○番

